Feuille d'exercices 3

(Pour les fans de la théorie des catégories)

Dans ces exercices, on étendra le théorème de Birkhoff à une dualité entre deux catégories :

la catégorie $\mathcal{E}$ dont :

- les objets sont les ensembles ordonnés finis ; et
- les morphismes sont les applications croissantes.

la catégorie $\mathcal{T}$ dont :

- les objets sont les treillis distributifs finis ; et
- les morphismes sont les applications (croissantes) f vérifiant :

$$\begin{aligned} f(x \wedge y) &= f(x) \wedge f(y) \qquad & f\big(\widehat{0}\big) &= \widehat{0} \\ f(x \vee y) &= f(x) \vee f(y) \qquad & f\big(\widehat{1}\big) &= \widehat{1} \end{aligned}$$

(Une telle application est appelée un *morphisme de treillis (bornés)*.)

Remarque. Pour montrer qu'il existe une dualité entre deux catégories $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$, il faut montrer qu'il existe deux foncteurs *contravariants*

$$F : \mathcal{E} \to \mathcal{T} \qquad \text{et} \qquad G : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$$

et des isomorphismes *naturels* entre les foncteurs

$$G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \qquad \text{et} \qquad F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{T}},$$

où $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est le foncteur identité de $\mathcal{E}$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{T}}$ est le foncteur identité de $\mathcal{T}$.

Exercice 1. Soit $\mathbf{T}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ le treillis à deux éléments, et F le foncteur "Hom" défini par

$$F(-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-, \mathbf{T}_2).$$

Tout d'abord, on montrera que l'image du foncteur F est dans la catégorie $\mathcal{T}$. Pour ce faire, on montrera que F est une "extension" de l'application J qui envoie un ensemble ordonné au treillis de ses parties commençantes. Explicitement, on montrera qu'il existe une bijection

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{parties commençantes de } E \\ (\text{éléments de } J(E)) \end{array} \right\} \xrightarrow{\varphi_{J(E)}} \left\{ \begin{array}{c} \text{applications croissantes } E \to \mathbf{T}_2 \\ (\text{éléments de } \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2)) \end{array} \right\}$$

et que la bijection induit une struture de treillis distributif sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2)$:

$$f \leq f' \qquad \text{ssi} \qquad \varphi^{-1}(f) \subseteq \varphi^{-1}(f').$$

On en déduira que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2)$, muni de cet ordre, est un objet de la catégorie $\mathcal{T}$.

Ensuite, on montrera que l'image d'une application croissante de E dans E' est un morphisme de treillis de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E', \mathbf{T}_2) \cong J(E')$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2) \cong J(E)$.

a. Soit E un ensemble ordonné fini, et $J(E)$ le treillis des parties commençantes de E. Pour $X \in J(E)$, on définit une fonction $f_X : E \to E$ par

$$f_X(e) = \begin{cases} \widehat{0}, & \text{si } e \in X, \\ \widehat{1}, & \text{si } e \notin X. \end{cases}$$

Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} J(E) & \xrightarrow{\varphi_{J(E)}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2) \\ X & \mapsto & f_X \end{array}$$

est une bijection entre les éléments de $J(E)$ et les fonctions croissantes $E \to \mathbf{T}_2$.

b. On définit un ordre sur les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2)$ par

$$f \leq f' \qquad \text{ssi} \qquad \varphi^{-1}(f) \subseteq \varphi^{-1}(f').$$

En déduire que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2)$ est un objet de la catégorie $\mathcal{T}$.

c. Pour toute fonction croissante $g : E \to E'$, on définit $\overline{g}^* : J(E') \to J(E)$ par :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E', \mathbf{T}_2) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, \mathbf{T}_2) \arrow[d, "\varphi_{J(E)}^{-1}"] \\ J(E') \arrow[u, "\varphi_{J(E')}"] \arrow[r, "\overline{g}^*"] & J(E) \end{tikzcd}$$

Montrer que $\overline{g}^*$ est donné par

$$\overline{g}^*(X) = (f_X \circ g)^{-1}(\widehat{0}),$$

et que g^* est un morphisme de treillis.

Exercice 2. Soit $\mathbf{T}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ le treillis à deux éléments, et G le foncteur "Hom" défini par

$$G(-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \mathbf{T}_2).$$

(Remarquer que $\mathbf{T}_2$ est un treillis distributif, alors il est un objet de $\mathcal{T}$.)

Soit T un treillis distributif fini. On montrera qu'il existe une bijection

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{morphismes de treillis } T \to \mathbf{T}_2 \\ (\text{éléments de } \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \mathbf{T}_2)) \end{array} \right\} \xrightarrow{\psi_T} \left\{ \text{ éléments de } S(T) \right\}$$

où $S(T)$ est l'ensemble ordonné des éléments sup-irréductible de T, et que la bijection induit une relation d'ordre sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \mathbf{T}_2)$:

$$h \leq h' \qquad \text{ssi} \qquad \psi_T(h) \leq \psi_T(h').$$

On en déduira que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \mathbf{T}_2)$, muni de cet ordre, est un objet de la catégorie $\mathcal{E}$.

Ensuite, on montrera que l'image de tout morphisme de treillis $h : T \to T'$ est une application croissante de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T', \mathbf{T}_2) \cong S(T')$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \mathbf{T}_2) \cong S(T)$.

a. Soit E un ensemble ordonné fini. Pour $e \in E$, on définit $j_e : J(E) \to \mathbf{T}_2$ par

$$j_e(X) = \begin{cases} \widehat{1}, & \text{si } e \in X \\ \widehat{0}, & \text{si } e \notin X \end{cases}$$

Montrer que l'application suivante est une bijection entre les éléments de E et les morphismes de treillis de $J(E)$ dans $\mathbf{T}_2$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi_E} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(J(E), \mathbf{T}_2) \\ e & \mapsto & j_e \end{array}$$

b. En déduire que les éléments de $S(T)$, où T est un treillis distributif fini, sont en bijection avec les morphismes de treillis de T dans $\mathbf{T}_2$.

c. Montrer que tout morphisme de treillis $T \to \mathbf{T}_2$ est de la forme j_e avec $e \in S(T)$.

d. Soit $h : T \to T'$ un morphisme de treillis et $h^\star$ son image par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-, \mathbf{T}_2)$. Montrer que $h^\star$ est une application croissante de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T', \mathbf{T}_2)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \mathbf{T}_2)$.

Exercice 3. Il reste à montrer qu'il existe des isomorphismes naturels tels que

$$G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \qquad \text{et} \qquad F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{T}},$$

où $\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ est le foncteur identité de $\mathcal{E}$ et $\mathrm{id}_{\mathcal{T}}$ est le foncteur identité de $\mathcal{T}$.

a. Montrer qu'il existe des isomorphismes $\eta_E : (G \circ F)(E) \to E$ dans $\mathcal{E}$ tels que le diagramme suivant est commutatif pour toute application croissante $f : E \to E'$.

$$\begin{tikzcd}
(G \circ F)(E) \arrow[r, "\eta_E"] \arrow[d, "(f^*)^\star"'] & E \arrow[d, "f"] \\
(G \circ F)(E') \arrow[r, "\eta_{E'}"] & E'
\end{tikzcd}$$

b. Montrer qu'il existe des isomorphismes $\eta_T : (F \circ G)(T) \to T$ dans $\mathcal{T}$ tels que le diagramme suivant est commutatif pour tout morphisme de treillis $h : T \to T'$.

$$\begin{tikzcd}
(F \circ G)(T) \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[d, "(h^\star)^*"'] & T \arrow[d, "h"] \\
(F \circ G)(T') \arrow[r, "\eta_{T'}"] & T'
\end{tikzcd}$$