Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Montrer qu'un treillis est modulaire ssi pour tous $a, b, c \in T$,

$$c \leq a, \quad a \wedge b = c \wedge b, \quad a \vee b = c \vee b \qquad \text{implique} \qquad a = c.$$

Exercice 2. Soit T un treillis fini. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

a. T est semimodulaire ; c'est-à-dire, pour tous $a, b \in T$,

$$a \wedge b \lessdot b \qquad \text{implique} \qquad a \lessdot a \vee b.$$

b. Pour tous $a, b, c \in T$, si

$$b \wedge c < a < c < b \vee a,$$

alors il existe $d \in T$ tel que

$$b \wedge c < d \leq b \qquad \text{et} \qquad a = (a \vee d) \wedge c.$$

c. Pour tous $a, b, c \in T$, si

$$b \wedge c < a < c < b \vee c,$$

alors il existe $d \in T$ tel que

$$b \wedge c < d \leq b \qquad \text{et} \qquad a = (a \vee d) \wedge c.$$

Exercice 3. *(Factorisation unique dans les treillis distributifs)* Soit T un treillis distributif.

a. Si $s \in T$ est sup-irréductible, et

$$s \leq t_1 \vee \cdots \vee t_n,$$

où $t_1, \ldots, t_n \in T$, alors il existe $i \in [n]$ tel que $s \leq t_i$.

b. Montrer que tout élément $x \in T$ admet une unique expression sous la forme

$$x = s_1 \vee \cdots \vee s_n$$

où $s_1, \ldots, s_n \in T$ sont distincts, sup-irréductibles, et deux-à-deux incomparables.

Exercice 4. Soit T un treillis distributif fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

a. T est isomorphe à l'ensemble ordonné des parties d'un ensemble E (muni de l'inclusion).

b. L'ensemble ordonné $\mathcal{S}(T)$ des éléments sup-irréductibles de T est une antichaîne de T.

c. T est *atomistique* : tout élément sup-irréductible de T est un atome.

d. T est *complémenté* : pour tout $x \in T$ il existe $x' \in T$ tel que $x \vee x' = \hat{1}$ et $x \wedge x' = \hat{0}$.

e. T est *relativement complémenté* : pour tout intervalle $[z, u] \subseteq T$ et pour tout $x \in [z, u]$, il existe $x' \in T$ tel que $x \vee x' = u$ et $x \wedge x' = z$.

(En outre, x' dans (d) et (e) est unique.) *(Indice: (e) ⇒ (d) ⇒ (c) ⇒ (b) ⇒ (a) ⇒ (e).)*

Exercice 5. Utiliser Sage pour répondre aux questions suivantes. *(Indice:* `posets(4)`*)*

a. Montrer que tout treillis semimodulaire à au plus 6 éléments est modulaire.

b. Montrer qu'il existe un seul treillis non modulaire à 7 éléments qui est semimodulaire.

c. Explorer les treillis non modulaires et semimodulaires à 8 éléments.