Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Montrer les propriétés suivantes pour tous éléments a, b, c, d d'un treillis.

a. Si $a \leq b$, alors $a \vee c \leq b \vee c$ and $a \wedge c \leq b \wedge c$.
b. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a \vee c \leq b \vee d$ and $a \wedge c \leq b \wedge d$.
c. Si $a \wedge b < c < a$, alors $a \wedge b = c \wedge b$.
d. Si $a < b < a \vee c$, alors $a \vee c = b \vee c$.

Exercice 2. Un ensemble ordonné E est *semimodulaire (supérieurement)* si pour tous $x, y, z \in E$ avec $z \lessdot x$ et $z \lessdot y$, il existe $u \in E$ tel que $x \lessdot u$ et $y \lessdot u$.

a. Montrer qu'un treillis est semimodulaire comme treillis ssi il est semimodulaire comme ensemble ordonné.
b. Montrer que si E est semimodulaire, alors E est rangé.

Exercice 3. Soit M la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Trouver un ensemble ordonné E et exprimer M en termes de la fonction ζ de E.
b. En déduire une formule pour les entrées de la matrice inverse M^{-1}.

Exercice 4. Soit E l'ensemble ordonné dont les éléments sont

$$\{\widehat{0}, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n, \widehat{1}\}$$

avec les relations de couverture suivantes :

$$\widehat{0} \lessdot x_i \lessdot y_j \lessdot z_k \lessdot \widehat{1} \quad \text{(pour tous } i, j, k \in [n]).$$

Calculer $\mu(\widehat{0}, \widehat{1})$. (*Indice: Déterminer les chaînes de $\widehat{0}$ à $\widehat{1}$ de longueur ℓ.*)

Exercice 5. Soit E un ensemble ordonné qui possède un $\widehat{0}$ et un $\widehat{1}$ et tel que le nombre de multichaînes de longueur ℓ de $\widehat{0}$ à $\widehat{1}$ est

$$3\binom{\ell+2}{3} - 2\ell.$$

a. Déterminer le rang de E (la longueur d'une chaîne maximale de E).
b. Calculer $\mu(\widehat{0}, \widehat{1})$.

Exercice 6. Soit x, y, z des éléments d'un treillis tels que $\{x \vee y, x \vee z, y \vee z\}$ est une antichaîne. Montrer que le sous-treillis engendré par $x \vee y$, $x \vee z$ et $y \vee z$ est isomorphe au treillis de parties de $\{1, 2, 3\}$ ordonnées par inclusion.

Exercice 7. Soit ϕ l'indicatrice d'Euler :

$$\phi(n) = |\{a \in [n] : \mathrm{pgcd}(a, b) = 1\}| .$$

Montrer que

$$\phi(n) = p_1^{a_1 - 1} \cdots p_s^{a_s - 1}(p_1 - 1) \cdots (p_s - 1),$$

où $n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ est la factorization de n en nombres premiers. (*Indice: appliquer la formule d'inversion de Möbius à* $f(x) = \{a \in [n] : x = \mathrm{pgcd}(a, n)\}$ *et* $g(x) = \{a \in [n] : x \leq \mathrm{pgcd}(a, n)\}$.)

Exercice 8. Soit E un ensemble localement fini. On définit $\kappa \in \mathrm{Inc}_{\mathbb{K}}(E)$ par

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \lessdot y, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a. Donner une description combinatoire de $\kappa^n(x, y)$ pour tous $x, y \in E$ et $n \in \mathbb{N}$.
b. Caractériser les ensembles ordonnés rangés (et localement fini) en termes de κ.
c. Donner une description combinatoire de $(\kappa\zeta)(x, y)$ et $(\zeta\kappa)(x, y)$.

Exercice 9. Soit E un ensemble ordonné fini, et μ la fonction de Möbius de $\widehat{E} = E \cup \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$. Supposons que E admet un automorphisme $\sigma : E \to E$ qui ne possède pas de points fixes et qui est d'ordre p, où p est un nombre premier.

a. Montrer que

$$\mu(\widehat{0}, \widehat{1}) \equiv -1 \pmod{p}.$$

b. Montrer que

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

pour tout nombre premier p. (*Indice: Considérer le treillis de partitions de* $\{1, \ldots, p\}$.)

Exercice 10 – Problème de recherche.
On définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de *toutes* les permutations par

$$\sigma \leq \pi \text{ si } \pi \text{ contient } \sigma,$$

où on dit qu'une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ *contient* une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ s'il existe une suite $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ telle que, pour tous $1 \leq a, b \leq m$,

$$\pi(i_a) < \pi(i_b) \qquad \text{ssi} \qquad \sigma(a) < \sigma(b).$$

(Autrement dit, les éléments de $(\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_m))$ sont dans le même ordre relatif que les éléments de $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m))$.) Par exemple, $\pi = 425613$ contient $\sigma = 132$.

Étudier cet ensemble ordonné ; en particulier, calculer sa fonction de Möbius. *(Certains résultats partiels sont connus ; voir « Permutation Pattern Poset » sur Google.)*