Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que S est *linéairement indépendant* ssi il existe $v_k \in S$ tel que v_k est *combinaison linéaire* des éléments de $S \setminus \{v_k\}$.

b. Montrer que S est *affinement indépendant* ssi il existe $v_k \in S$ tel que v_k est *combinaison affine* des éléments de $S \setminus \{v_k\}$.

c. Montrer que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est affinement indépendant ssi $\{v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$ est linéairement indépendant.

Exercice 2. Un sous-ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est un *sous-espace affine* si toute combinaison affine finie des éléments de S apaprtient à S.

a. Montrer que S est un sous-espace affine ssi il existe un sous-espace linéaire $L \subseteq \mathbb{R}^n$ et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $S = L + v$.

b. Montrer que S est un sous-espace affine ssi pour tous $v, u \in S$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a que $\alpha v - (1 - \alpha)u \in S$.

Exercice 3. Soit $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un polytope de dimension d, et F une face propre de P.

a. Montrer F est une facette de P ssi F contient d points affinement indépendants.

b. Montrer que F est une facette de P ssi il possède un unique hyperplan support.

Exercice 4. Montrer que les polytopes de dimension 3 qui possède au plus 9 faces de dimension 1 se séparent en 4 classes d'équivalence combinatoire.

Exercice 5. Utiliser SageMath pour explorer le polytope

$$P = \operatorname{conv}\Big((0,0,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (1,1,0,0),$$
$$(-1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1), (-1,0,0,1)\Big).$$

a. Calculer le nombre de faces de P de dimension i, pour $0 \leq i \leq 4$.

b. Calculer le treillis de faces de P.

c. Construire le polytope polaire P^*.

d. Montrer que les facettes de P^* sont deux-à-deux combinatoirement équivalents.

Exercice 6. Soit $P \subseteq \mathbb{R}^d$ et $P' \subseteq \mathbb{R}^e$ deux polytopes.

a. Montrer que $P \times P' \subseteq \mathbb{R}^{d+e}$ est un polytope de dimension $\dim(P) + \dim(P')$.

b. Montrer que si F est une face de P et F' est une face de P', alors $F \times F'$ est une face de $P \times P'$ de dimension $\dim(F) + \dim(F')$.

c. Calculer le nombre de faces de chaque dimension pour les polytopes

$$\Delta_4, \qquad \Delta_3 \times \Delta_1, \qquad \Delta_2 \times \Delta_2,$$

où $\Delta_d \subseteq \mathbb{R}^d$ est l'enveloppe convexe de $0, e_1, e_2, \ldots, e_d$.

Exercice 7. Soit $P = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_n\}$ un polytope dans $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'un point $p \in \mathbb{R}^d$ appartient à l'intérieur relatif de P ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_i > 0 \text{ pour tout } i \in [n].$$

Rappel : l'*intérieur relatif* de $C \subseteq \mathbb{R}^d$ est l'intérieur de C dans son enveloppe affine $\operatorname{aff}(C)$.

Exercice 8. Soit $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq \operatorname{vert}(P)$ et F une face de P. Montrer que F est le supremum de $v_1, \ldots, v_k$ dans le treillis des faces de P ssi $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} v_i$ appartient à l'intérieur relatif de F.

Exercice 9. Montrer que tout polytope P à n sommets est la projection orthogonale d'un $(n-1)$-simplex (à n sommets).

Exercice 10. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts de $\mathbb{R}^d$, avec $n \geq 1$. Posons

$$P = \operatorname{conv}\big(x_1, \ldots, x_n\big) \qquad \text{et} \qquad Q = \bigcap_{i=1}^{n} \{v \in \mathbb{R}^d : \langle v, x_i \rangle \leq 1\}.$$

Montrer les énoncés suivants.

a. $P^* = Q$, où P^* est le polaire de P.

b. $Q^* = \operatorname{conv}\big(0, x_1, \ldots, x_n\big)$

c. $Q^* = P$ ssi $0 \in P$.

d. $Q^* = P$ et Q est borné ssi 0 appartient à l'intérieur de P.

e. Supposons $Q^* = P$ et que Q est borné. Alors, $\operatorname{vert}(P) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ssi

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} \{v \in \mathbb{R}^d : \langle v, x_i \rangle \leq 1\}$$

est une représentation "irréductible" de Q.