

Devoir 1

à remettre le 24 octobre 2018

Exercice 1. Soit G le sous-groupe de S_7 engendré par les permutations

$$a = (12)(34) \quad \text{et} \quad b = (235)(467).$$

En utilisant les algorithmes vus en classe :

- a. Calculer l'orbite $\text{Orb}_G(1)$ et un système de représentants de $\text{Stab}_G(1)$ dans G .
- b. Montrer que $\text{Stab}_G(1) = \langle (245)(467), (34)(57) \rangle$.
- c. Calculer une base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ pour G .
- d. Calculer l'ordre de G .
- e. Déterminer si les permutations suivantes sont des éléments de G .
Si oui, exprimer la permutation comme un produit de générateurs de G .

$$\rho = (174)(25)(36) \quad \sigma = (1543267) \quad \tau = (1362574)$$

Exercice 2. (*Algorithme de Todd-Coxeter*)

Soit

$$G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle \quad \text{et} \quad H = \langle x, yx^{-1}y^2 \rangle.$$

- a. Montrer que $[G : H] = 5$.
- b. Soit $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de H . Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1$.
- c. En déduire que $|H| \leq 12$.
- d. Montrer que $|G| = 60$. **Bonus :** Montrer que $G \cong A_5$.

Exercice 3. (*Renverse de l'algorithme de Todd-Coxeter*) Calculer une présentation par générateurs et relations du groupe engendré par les permutations :

$$a = (1264)(3857) \quad \text{et} \quad b = (1365)(2748).$$