Devoir 2

à remettre le 3 décembre 2018

Exercice 1. Pour une permutation σ, on définit

— $\operatorname{lsc}(\sigma)$ comme la longueur de la plus longue sous-suite *croissante* de σ, et

— $\operatorname{lsd}(\sigma)$ comme la longueur de la plus longue sous-suite *décroissante* de σ.

Montrer que si $\sigma \in S_n$ et $n > rs$ avec $r, s \in \mathbb{N}$, alors $\operatorname{lsc}(\sigma) > r$ ou $\operatorname{lsd}(\sigma) > s$.

(Indice : considérer les paires $(\operatorname{lsc}_k(\sigma), \operatorname{lsd}_k(\sigma))$ *pour* $1 \leq k \leq n$*, où* $\operatorname{lsc}_k(\sigma)$ *est la longueur de la plus longue suis-suite croissante de* σ *qui termine par* σ_k*, et* $\operatorname{lsd}_k(\sigma)$ *est défini de manière analogue.)*

Exercice 2. Pour une matrice A à coefficients dans $\mathbb{N}$, noter par $(P(A), Q(A))$ la paire de tableaux semi-standard associée à A par l'algorithme de RSK.

Soit A et B deux matrices de mêmes dimensions telles que $A_{i,j} \neq 0$ ssi $B_{i,j} \neq 0$. Montrer que

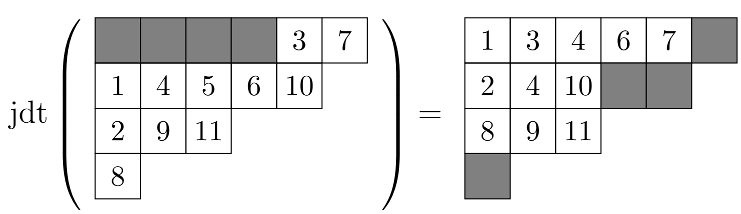
— la première colonne de $P(A)$ coïncide avec la première colonne de $P(B)$;

— la première colonne de $Q(A)$ coïncide avec la première colonne de $Q(B)$.

Exercice 3. On dit qu'un partage gauche λ/μ est une *bande horizontale de longueur* m s'il contient m cellules et ces m cellules apparaissent dans des colonnes distinctes de λ.

Soit T un tableau gauche standard de forme $\lambda/(m)$. Montrer que $\lambda/\operatorname{forme}(\operatorname{jdt}(T))$ est une bande horizontale de longueur m.

Par exemple,



Exercice 4. Montrer que

$$\sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1 - x_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 - x_i x_j}.$$