

Devoir 3

à remettre le 19 décembre 2018

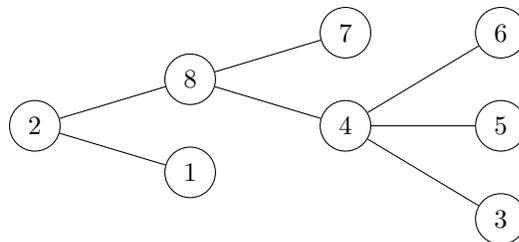
Exercice 1. On dit qu'une suite σ de $2n$ entiers possède la propriété **P** si elle est constituée des entiers de 1 à n répétés chacun deux fois, et le nombre d'éléments entre les deux occurrences de k est k . Par exemple, 41312432 est une suite possédant la propriété **P**, car :

- il y a 1 élément entre les deux occurrences de 1 ;
- il y a 2 éléments entre les deux occurrences de 2 ;
- il y a 3 éléments entre les deux occurrences de 3 ;
- il y a 4 éléments entre les deux occurrences de 4.

- a. Formuler le problème de trouver les suites possédant la propriété **P** en termes du problème de la couverture exacte (version matricielle).
- b. Donner la matrice associée pour $n = 3$ et $n = 4$.
- c. Déterminer le nombre de suites possédant la propriété **P** pour n égal à 3, 4 et 5.

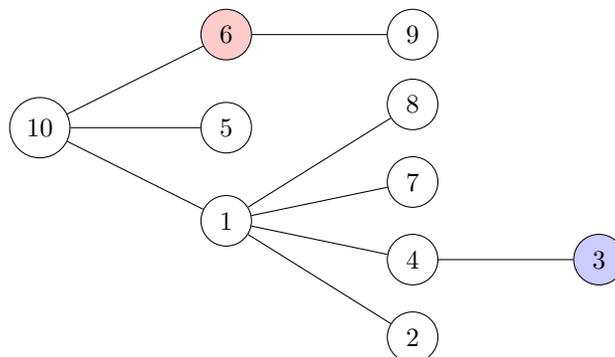
Exercice 2.

- a. Calculer le code de Prüfer de l'arbre suivant.



- b. Calculer l'arbre avec code de Prüfer $[1, 1, 1, 1, 3, 6, 3, 5]$.

Exercice 3. Calculer la fonction associée à l'arbre suivant par la bijection de Joyal, où le sommet 6 est marqué « début » et le sommet 3 est marqué « fin ».



Exercice 4. Soit K_n le graphe complet à n sommets et G_n le sous-graphe obtenu en supprimant une arête de K_n . Calculer le nombre d'arbres couvrants de G_n .

Exercice 5. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on note par $F(\sigma)$ la permutation associée à σ par la correspondance de Foata. Par exemple, en utilisant la notation à une ligne pour les permutations, on a que

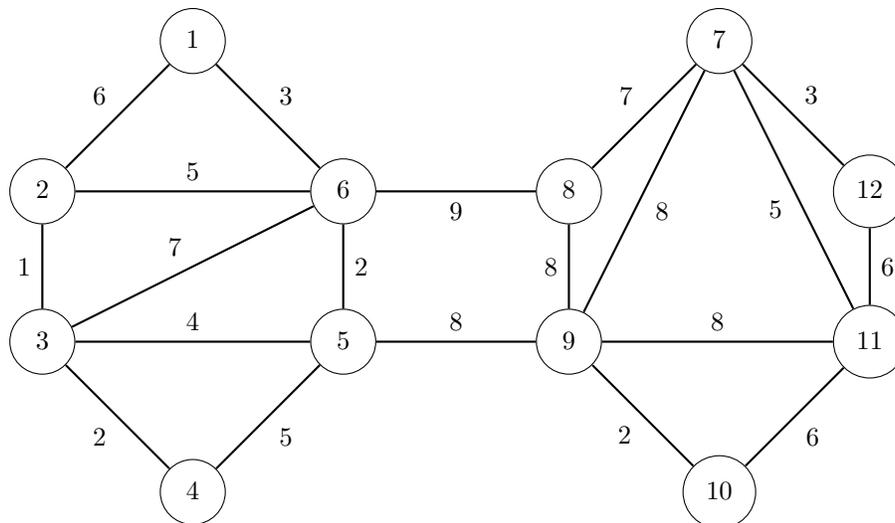
$$F(813697425) = 821367495$$

puisque la permutation 813697425 admet la décomposition en cycles disjoints suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 9 & 7 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (821)(3)(674)(95).$$

- Pour $1 \leq n \leq 4$, faire la liste des permutations σ telles que $F(\sigma) = \sigma$.
- Trouver une formule pour le nombre de permutations $\sigma \in S_n$ telles que $F(\sigma) = \sigma$.

Exercice 6. Soit G le graphe suivant.



- Appliquer l'algorithme de Prim au sommet 9 de G .
Indiquer l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées à l'arbre.
- Utiliser l'algorithme de Kruskal pour calculer un arbre couvrant minimum de G .
Indiquer l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées à l'arbre.