Devoir 1

à remettre le 7 octobre 2013

Exercice 1.

> On dit qu'un groupe abélien $(D, +)$ est *divisible* si, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $y \in D$, il existe au moins un élément z de D tel que $n \cdot z = y$.

Soient G un groupe abélien, H un sous-groupe de G, et D un group abélien divisible. Montrer que tout homomorphisme $f : H \to D$ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{f} : G \to D$.

Exercice 2. Soit G un groupe non trivial qui possède une partie génératrice fini. Montrer que G possède un sous-groupe maximal (propre).

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de l'addition, ne possède pas de sous-groupe maximal.

Exercice 4. Soient G un groupe, $Ab(G) = G/[G, G]$ l'abéliansé de G, et $\pi_G : G \to Ab(G)$ la surjection canonique. Montrer que $Ab(G)$ vérifie la propriété universelle suivante :

> Pour tout morphisme de groupes $f : G \to H$ avec H abélien,
> il existe un unique morphisme $f^\sharp : Ab(G) \to H$ tel que $f = f^\sharp \circ \pi_G$.

Exercice 5. Soient A et B deux groupes abéliens. On a vu que le produit direct $A \times B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie de groupes abéliens **Ab**.

En utilisant la propriété universelle des coproduits, montrer que $A \times B$ n'est pas le coproduit de A et B dans la catégorie de groupes **Gr**. *(Considérer les groupes cycliques C_2 et C_3 et morphismes $C_2 \to S_3$ et $C_3 \to S_3$.)*

Exercice 6. Soit $\mathscr{B}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, les morphismes sonts les applications bijectives, et la composition de morphismes et la composition d'applications.

a. Soit **Perm** la correspondance qui associe à tout ensemble fini X l'ensemble de permutations de X, et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$ l'application $\sigma \longmapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}$. Montrer que **Perm** définit un foncteur **Perm** : $\mathscr{B} \longrightarrow$ **Ens**.

b. Soit **Liste** la correspondance qui associe à tout ensemble fini X l'ensemble de listes ordonnées[1] d'éléments de X, et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$ l'application $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \longmapsto [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)]$. Montrer que **Liste** définit un foncteur **Liste** : $\mathscr{B} \longrightarrow$ **Ens**.

c. Montrer que **Perm**$(X) \cong$ **Liste**(X), pour chaque $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$.

d. Montrer qu'il n'existe pas de transformation naturelle entre **Perm** et **Liste**.

1. Par exemple, **Liste**$(\{a, b, c\}) = \{[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]\}$.