Devoir 2

à remettre le 11 novembre 2013

Exercice 1. *(Algorithme de Todd-Coxeter)* Soient

$$G = \left\langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \right\rangle \quad \text{and} \quad H = \left\langle x, yx^{-1}y^2 \right\rangle .$$

a. Montrer que $[G : H] = 5$.

b. Soient $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de H. Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = 1$.

c. En déduire que $|H| \leq 12$.

d. Montrer que $|G| = 60$ et que $G \cong A_5$.

Exercice 2. *(Renverse de l'algorithme de Todd-Coxeter)* Calculer une présentation par générateurs et relations du groupe engendré par les permutations suivantes :

$$a = (1, 2, 6, 4)(3, 8, 5, 7)$$
$$b = (1, 3, 6, 5)(2, 7, 4, 8).$$

Exercice 3. Soit G et G' deux groupes décrits par générateurs et relations :

$$G = \langle S \mid R \rangle \quad \text{et} \quad G' = \langle S' \mid R' \rangle$$

Le *produit libre* de G et G' est le groupe décrit par la présentation suitante :

$$G * G' = \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle .$$

a. Montrer que $G * G'$ est le coprodiut de G et G' dans la catégorie des groupes.

b. En déduire que le coproduit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans la catégorie des groupes est isomorphe au groupe diédral infini $D_\infty = \langle x, y : x^2, y^2 \rangle$.

c. En déduire que le coproduit de deux groupes libres F_n et F_m et isomorphe à F_{n+m}.

Exercice 4. Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. On dit que deux foncteurs

$$\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

sont des *foncteurs adjoints* s'il existe un isomorphisme naturelle (en chaque variable) entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(X), Y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \mathcal{G}(Y)).$$

a. Soient **Grp** la catégorie des groupes et **Ab** la catégorie des groupes abéliens. Montrer que le foncteur d'inclusion incl : $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ et le foncteur d'abélianisation $Ab : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ sont des foncteurs adjoints.

b. Soient G et G' deux groupes. Montrer que l'abéianisé $Ab(G * G')$ est isomorphe au produit cartésien $Ab(G) \times Ab(G')$.

Exercice 5. ($\mathbb{R}[x]$*–modules.*) Soit $V = \mathbb{R}^2$. Rappler que V devient un $\mathbb{R}[x]$–module si l'on se donne une application linéaire $T : V \to V$.

a. Soit $T_1 : V \to V$ la rotation par $\pi/2$ dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que V et $\{0\}$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-modules de V.

b. Soit $T_2 : V \to V$ la projection sur la droite $x = 0$. Montrer que V, $\{0\}$, la droite $x = 0$ et la droite $y = 0$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

c. Soit $T_3 : V \to V$ la rotation par π dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que tout sous-espace de V est $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

Exercice 6.

Pour un idéal I d'un anneau R et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I^n comme l'ensemble des combinaison linéaire finie des éléments de la forme $i_1 \cdots i_n$, où $i_1, \ldots, i_n \in I$.

Soit R un anneau commutatif. Soit I un idéal de R tel que $I^n = \{0\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : M \to N$ un R-morphisme. Montrer que si l'application $\bar{\varphi} : M/IM \to N/IN$ définie par $\bar{\varphi}(m + IM) = \varphi(m) + IN$ est surjective, alors φ est surjective.