Devoir 3

à remettre le 9 décembre 2013

Exercice 1. Soit n un entier positif.

a. Trouver la longueur d'une suite de composition du $\mathbb{Z}$–module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b. Caractériser les n pour lesquels $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet une suite de composition unique.

Exercice 2. Soient M un R–module et $f \in \mathrm{End}_R(M)$.

a. Si M est noethérien et si f est un épimorphisme, alors f est un automorphisme.

b. Si M est artinien et si f est un monomorphisme, alors f est un automorphisme.

Exercice 3. Soient M un R–module artinien et noethérien et $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Trouver une décomposition de M en somme directe $M = M' \oplus M''$ telle que la restriction de f à M' soit nilpotente et que la restriction de f à M'' soit inversible.

Exercice 4. Soient M un R–module indécomposable tel que $\mathrm{End}_R(M)$ soit un anneau local d'idéal maximal I. Montrer que, pour tout module N et tous morphismes $f : M \to N$ et $g : N \to M$, on a $g \circ f \in I$ ou que M est un facteur direct de N.

Exercice 5. L'objectif de cet exercice est de caractériser les modules de $\bigoplus_i \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

a. Montrer que si V est un $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$–module simple, alors V est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

> *Indice. Soit e_{ij} la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j), qui vaut 1. Montrer que si $v \in V$ est non nul, alors le sous-espace vectoriel $S(v)$ engendré par les vecteurs $e_{11}v, e_{21}v, \ldots, e_{n1}v$ est un sous-module de V isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

b. Soit M un $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$–module de dimension finie. Montrer que $M \cong \mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}^n$.

> Indice. *Montrer que $M = e_{11}M \oplus e_{22}M \oplus \cdots \oplus e_{nn}M$, et que $\varphi_i : e_{11}M \to e_{ii}M$ défini par $\varphi(v) = e_{i1}\,v$ est un isomorphisme pour tout i. Ensuite, montrer que $M \cong S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus \cdots \oplus S(v_k)$, où $v_1, v_2, \ldots, v_k$ est une base de $e_{11}M$.*

c. Soit $R = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathbb{K})$. En déduire que :

(c_1) Si S est un R–module simple, alors il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $S \cong \mathbb{K}^{n_i}$.

(c_2) Si M est un R–module de dimension fini, alors M est semi-simple (c'est-à-dire, M est isomorphe à une somme directe finie de R–modules simples).