Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit G un groupe. Le *commutateur* de deux éléments $g, h \in G$, noté $[g, h]$, est

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Le *sous-groupe dérivé* de G, noté $[G, G]$ ou G', est le sous-groupe engendré par les commutateurs :

$$[G, G] = \langle [g, h] : g, h \in G \rangle$$

a. Montrer que G est abélien ssi son sous-groupe dérivé $[G, G]$ est trivial.

b. Montrer que le sous-groupe dérivé $[G, G]$ de G est un sous-groupe normal de G.

c. Montrer que le quotient $Ab(G) = G/[G, G]$, appelé l'*abéliansé* de G, est abélien.

d. Sachant que le groupe alterné A_n (le sous-groupe du groupe symétrique S_n des permutations paires) est engendré par les cycles d'ordre 3, montrer que $[S_n, S_n] = A_n$.

e. Montrer que $[G, G]$ est égal à l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $\rho(g) = 1$ pour toute représentation [1] ρ de *dimension* 1 ; c'est-à-dire,

$$[G, G] = \bigcap_{\rho : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})} \ker(\rho).$$

f. Montrer que toute représentation de dimension 1 de G provient d'une représentation de dimension 1 de l'abéliansé de G. Plus précisément,
- Si $\rho : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ est une représentation de dimension 1 de G, alors $\rho|_{Ab(G)}$ est une représentation de dimension 1 de $Ab(G)$.
- Si $\varphi : Ab(G) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ est une représentation de dimension 1 de l'abéliansé de G, alors $\tilde{\varphi} : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ défini par $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g[G, G])$ est une représentation de G de dimension 1.

g. En déduire qu'il y a exactement deux représentation de dimension 1 de S_n, pour $n \geq 2$.

Exercice 2. Exercice 5.1.1 dans les notes de course de Luc Bélair. (Il s'agit d'une série d'exercices pour montrer que l'axiome du choix entraîne le lemme de Zorn).

Exercice 3. Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G. Soit D un groupe abélien *divisible* : c'est-à-dire, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $y \in D$, il existe au moins un $z \in D$ tel que $n \cdot z = y$. Montrer que tout homomorphisme $f : H \to D$ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{f} : G \to D$.

Exercice 4. Montrer que tout anneau unitaire et non-triviale ($0 \neq 1$) possède un idéal maximal propre. *(Remarque : L'hypothèse que l'anneau soit unitaire est important : autrement, le résultat est faux !)*

1. Une *représentation de G de dimension 1* est un morphisme de groupes de la forme $G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.