Feuille d'exercices 2

Exercice 1. (*Propriété universelle de* $\ker(f)$)
Soit $f : M \to N$ un morphisme de groupes abéliens (ou espaces vectoriels, R–modules, ...). On montrera que le noyau K de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de groupes abéliens $\ell : K \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : K' \to M$ est un morphisme de groupes abéliens tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un unique morphisme de groupes abéliens $u : K' \to K$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ K' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & & \end{tikzcd}$$

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un groupe abélien qui vérifie (i) et (ii), alors $K \cong \ker(f)$.

Exercice 2. Soient $X \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} Z$ deux morphisme d'une catégorie $\mathscr{C}$.

a. Si $f \circ g$ est un monomorphisme, alors g est un monomorphisme.

b. Si f et g sont des monomorphismes, alors $f \circ g$ est un monomorphisme.

c. Si $f \circ g$ est un épimorphisme, alors f est un épimorphisme.

d. Si f et g sont des épimorphisme, alors $f \circ g$ est un épimorphisme.

e. Si f est un isomorphe, alors f est un monomorphisme et un épimorphisme.

f. Si deux morphismes parmi f, g et $f \circ g$ sont isomorphismes, alors f, g et $f \circ g$ sont isomorphismes.

Exercice 3.

a. Montrer que les objets initials, finals ou nuls sont unique à *unique* isomorphisme près.

b. Montrer que le groupe trivial est un objet nul dans les catégories **Ab** et **Gr**.

c. Montrer que ni **Ens** ni **Top** admet des objet nuls.

d. Soit $X = \{x\}$ un ensemble à un seul élément. Montrer que (X, x) est un objet nul dans $\mathbf{Ens}_*$, la catégorie d'ensembles pointés, et dans $\mathbf{Top}_*$, la catégorie d'espaces topologiques pointés.

Exercice 4. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ est un object initial dans la catégorie $\mathbf{Ann_1}$ et que l'anneau nul (l'anneau à un seul élément) est l'object terminal.

Exercice 5. Soit F un object final dans la catégorie **Ens**.

a. Montrer qu'il y a une bijection entre les éléments d'un ensemble A et les morphismes de **Ens** de la forme $F \to A$.

b. Si $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme de **Ens**, montrer qu'il y a une bijection entre les éléments de $\mathrm{im}(f)$ et les morphismes de la forme $F \to A \xrightarrow{f} B$.

Exercice 6. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, I un objet initial de $\mathscr{C}$ et F un objet final de $\mathscr{C}$.

a. Montrer que tout morphisme de la forme $A \to I$ admet un inverse à droite.

b. Montrer que tout morphisme de la forme $F \to B$ admet un inverse à gauche.

c. Montrer que s'il existe un morphisme de F vers I dans $\mathscr{C}$, alors F et I sont isomorphes.

Exercice 7. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie qui possède un objet final F et qui admet produits.

a. Montrer que $F \times A \cong A \cong A \times F$.

b. Montrer que $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$ pour tous $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Exercice 8. Soit A et B de groupes abéliens.

a. Montrer que le produit cartesien $A \times B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie **Ab** de groupes abéliens.

b. Montrer que $A \times B$ n'est pas le coproduit de A et B dans la catégorie **Gr** de groupes. *(Considérer deux groups cycliques C_2 et C_3 et morphismes de C_2 et C_3 vers S_3.)*

Exercice 9. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie qui admet produits ($\prod$) et coproduits ($\coprod$). Pour trois objets $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, on définit

$$\mathcal{G} = \left(A \prod C\right) \coprod \left(B \prod C\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} = \left(A \coprod B\right) \prod C$$

a. Montrer qu'il existe une flèche dans $\mathscr{C}$ de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{D}$.

b. Donner un exemple pour montrer qu'il n'y a pas nécessairement une flèche $\mathcal{D} \to \mathcal{G}$.

Exercice 10. Soit $\mathscr{C}$ la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné $(P, \leq)$.

a. Décrire les isomorphismes, les monomorphismes et les épimorphismes de $\mathscr{C}$.

b. Est-ce que la catégorie $\mathscr{C}$ admet d'object initial ? final ? nul ? Si oui, donner une description de l'object en termes du $(P, \leq)$.

c. Soit X un object de $\mathscr{C}$. Donner une description de la catégorie $\mathscr{C}_X$ en termes du $(P, \leq)$.

d. Décrire le produit et le coproduit de deux objects de la catégorie $\mathscr{C}$.

Exercice 11. Soit **Mon** la catégorie de monoïdes. Montrer que l'inclusion $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ est un épimorphisme.

Exercice 12. Soient B et C deux sous-ensemble d'un ensemble A.

a. Montrer que le produit fibré dans **Ens** de $B \xrightarrow{B} A$ et $C \xrightarrow{C} A$ est $B \cap C$.

b. Montrer que la somme amalgamée dans **Ens** de $B \cap C \to B$ et $B \cap C \to C$ est $B \cup C$.