Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit R un anneau. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a. R est un anneau local.

b. R possède un unique idéal à gauche maximal.

c. R possède un unique idéal à droite maximal.

d. L'ensemble des éléments non inversibles de R est un idéal bilatère maximal de R.

e. Pour chaque $x \in R$, au moins un des éléments x ou $1 - x$ est inversible.

Exercice 2. Soient R un anneau et I un idéal bilatère de R tel que l'anneau quotient R/I soit local. Montrer que R est local.

Exercice 3. Soient M un R–module et $f \in \mathrm{End}_R(M)$.

a. Si M est noethérien et si f est un épimorphisme, alors f est un automorphisme.

b. Si M est artinien et si f est un monomorphisme, alors f est un automorphisme.

Exercice 4. Soit R un anneau. Soit J l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de R. Montrer que si $a \in J$, alors $1 - a$ admet un inverse à gauche dans R.

Exercice 5. Soit R un anneau et soit J l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de R. Montrer que R est local ssi J est un idéal maximal de R.

Exercice 6. Soient M un R–modules et $e \in R$ un idempotent.

a. Montrer que $eM \cong \mathrm{Hom}_R(Re, M)$.

b. Montrer que $eRe \cong \mathrm{End}_R(Re)^{opp}$.

Exercice 7. Soient e et f deux idempotents de R. Montrer que e et f sont conjugués ssi $Re \cong Re'$ et $R(1 - e) \cong R(1 - f)$.

(Rappel : on dit que x et y sont conjugués s'il existe un élément inversible $a \in R$ tel que $x = aya^{-1}$.)

Exercice 8. Soient M un R–module artinien et noethérien et $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Trouver une décomposition de M en somme directe $M = M' \oplus M''$ telle que la restriction de f à M' soit nilpotente et que la restriction de f à M'' soit inversible.

Exercice 9. Soient M un R–module indécomposable tel que $\mathrm{End}_R(M)$ soit un anneau local d'idéal maximal I. Montrer que, pour tout module N et tous morphismes $f : M \to N$ et $g : N \to M$, on a $g \circ f \in I$ ou que M est un facteur direct de N.

Exercice 10. Soit M un R–module. Soit $J(M)$ l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M.

a. Montrer que $J(M)$ est égal à l'intersection des noyaux de tous les morphismes $f : M \to S$, où S parcourt l'ensemble de tous les R–modules simples.

b. Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules. Montrer que $f(J(M)) \subseteq J(N)$.

c. Si N est un sous-module de M contenu dans $J(M)$, alors $J(M/N) = J(M)/N$.

d. Montrer que si N est un sous-module de M, alors

$$J(M/N) \supseteq \left(J(M) + N\right)/N.$$

e. Montrer que $J(M)$ est le plus petit des sous-modules N de M tels que $J(M/N) = 0$.

f. Montrer que $J(M/J(M)) = 0$.