# Feuille d'exercices 6

**Exercice 1.** Soient $M$ un $R$–module, $L$ un $R$–module libre et $M \xrightarrow{g} L$ un épimorphisme.

*a.* Montrer qu'il existe un $R$–morphisme $L \xrightarrow{h} M$ tel que $g \circ h = 1_L$.

*b.* Montrer que $M \cong \ker(g) \oplus L$. *(Indice : montrer que $M \cong \ker(g) \oplus \operatorname{im}(h)$.)*

**Exercice 2.** Soient $R$ un anneau principal et $p, q \in R$ des éléments premiers non associés.

*a.* Soient $M$ un $R$–module tel que $(pq) \cdot M = 0$. Montrer que

$$M \cong M_p \oplus M_q,$$

où $M_p = \{m \in M : p \cdot m = 0\}$ et $M_q = \{m \in M : q \cdot m = 0\}$.

*b.* Montrer que $R/\langle pq \rangle \cong R/\langle p \rangle \oplus R/\langle q \rangle$.

**Exercice 3.**

*a.* Soit $A$ la matrice

$$\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x-2 \end{pmatrix}$$

à coefficients $\mathbb{Q}[x]$. Calculer la forme normal de Smith $N$ de $A$ sur $\mathbb{Q}[x]$ ainsi que des matrices inversibles $P$ et $Q$ telles que $N = PAQ$.

*b.* Soit $B$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

à coefficients $\mathbb{Q}$. Déterminer la décomposition en somme directe de $\mathbb{Q}[x]$–modules indécomposables du $\mathbb{Q}[x]$–module $\mathbb{Q}^4$ induite par $A$.

*c.* Trouver la forme canonique de Jordan $J$ de $B$ et une matrice $P$ tel que $J = P^{-1}BP$.

**Exercice 4.**

*a.* Calculer le groupe de Galois de $x^4 + 4$ sur $\mathbb{Q}$.

*b.* Calculer le groupe de Galois de $x^3 - 2$ sur $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

*c.* Calculer le groupe de Galois de $x^3 - 2$ sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

**Exercice 5.** Soit $f(x) = x^3 + bx^2 + c^x + d \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme irréductible qui possède précisément 1 racine réelle. Montrer que le groupe de Galois de $f$ est $S_3$.