Devoir 1

à remettre le 29 septembre 2015

Exercice 1.

> On dit qu'un groupe abélien $(D, +)$ est *divisible* si, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $y \in D$, il existe au moins un élément z de D tel que $n \cdot z = y$.

Soient G un groupe abélien, H un sous-groupe de G, et D un groupe abélien divisible. Montrer que tout homomorphisme $f : H \to D$ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{f} : G \to D$.

Exercice 2. Soit G un groupe non trivial qui possède une partie génératrice fini. Montrer que G possède un sous-groupe maximal (propre).

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de l'addition, ne possède pas de sous-groupe maximal.

Exercice 4.
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes abéliens. Montrer que le noyau K de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de groupes abéliens $i : K \to G$ tel que $f \circ i = 0$; et

(ii) si $i' : K' \to G$ est un morphisme de groupes abéliens tel que $f \circ i' = 0$, alors il existe un unique morphisme de groupes abéliens $u : K' \to K$ tel que $i' = i \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "f"] & H \\
K' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un groupe abélien qui vérifie (i) et (ii), alors $K \cong \ker(f)$.