

**Devoir 2**

à remettre le 22 octobre 2015

**Exercice 1.**

Soit  $A, B, C$  des groupes abéliens. Montrer que dans la catégorie des groupes abéliens,

a. le produit fibré de  $B \xrightarrow{f} A$  et  $C \xrightarrow{g} A$  est

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C : f(b) = g(c)\};$$

b. la somme amalgamée de  $A \xrightarrow{g} C$  et  $A \xrightarrow{f} B$  est

$$D = (B \oplus C)/N,$$

où  $N = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$ .

(Indice: Il faut définir les morphismes  $\alpha$  et  $\beta$  associés à  $D$ .)

**Exercice 2.**

Soit  $A$  et  $B$  deux groupes abéliens. On a vu que le produit direct  $A \times B$  est le coproduit de  $A$  et  $B$  dans la catégorie des groupes abéliens. En utilisant la propriété universelle du coproduit, montrer que  $A \times B$  n'est pas le coproduit de  $A$  et  $B$  dans la catégorie des groupes.

(Indice: Considérer les groupes cycliques  $C_2$  et  $C_3$  et des morphismes  $C_2 \rightarrow S_3$  et  $C_3 \rightarrow S_3$ .)

**Exercice 3 (nouvel exercice)**

Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles disjoints. Montrer que le groupe libre  $F(X \cup Y)$  sur  $X \cup Y$  est le coproduit de  $F(X)$  et  $F(Y)$  dans la catégorie des groupes. (Ici,  $F(X)$  et  $F(Y)$  sont les groupes libres sur  $X$  et  $Y$ , respectivement.)

**Exercice 4.**

Soit  $A, B, C$  des objets d'une catégorie  $\mathcal{C}$ . Montrer que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \sqcup B, C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \sqcap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C).$$

**Bonus!**

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie qui admet des produits (notés  $\square$ ) et qui possède un objet final  $F$ . Soit

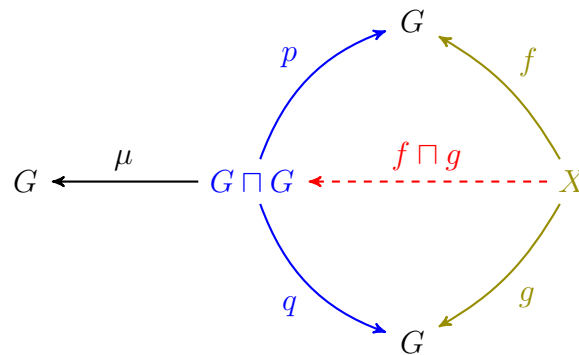
$$(G, \mu : G \square G \rightarrow G, \varepsilon : F \rightarrow G, \text{inv} : G \rightarrow G)$$

un objet groupe dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .

On a vu dans le cours que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$  est un groupe avec opération (notée  $\otimes$ ) définie par

$$f \otimes g = \mu \circ (f \square g),$$

où  $f \square g$  est donné par la propriété universelle de  $G \square G$  :



En utilisant cette description de  $\otimes$ , montrer que  $\varepsilon \circ \zeta$  est l'élément neutre, où  $\zeta : X \rightarrow F$ . C'est-à-dire, montrer que  $f \otimes (\varepsilon \circ \zeta) = f$  et  $(\varepsilon \circ \zeta) \otimes f = f$  pour tout  $X \xrightarrow{f} G$ .

(Indication : considérer le diagramme suivant.)

