# Devoir 2

à remettre le 22 octobre 2015

**Exercice 1.**

Soit $A, B, C$ des groupes abéliens. Montrer que dans la catégorie des groupes abéliens,

*a.* le produit fibré de $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ est

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C : f(b) = g(c)\}\,;$$

*b.* la somme amalgamée de $A \xrightarrow{g} C$ et $A \xrightarrow{f} B$ est

$$D = (B \oplus C)/N,$$

où $N = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$.

*(Indice: Il faut définir les morphismes $\alpha$ et $\beta$ associés à $D$.)*

**Exercice 2.**

Soit $A$ et $B$ deux groupes abéliens. On a vu que le produit direct $A \times B$ est le coproduit de $A$ et $B$ dans la catégorie des groupes abéliens. En utilisant la propriété universelle du coproduit, montrer que $A \times B$ *n'est pas* le coproduit de $A$ et $B$ dans la catégorie des groupes.

*(Indice: Considérer les groupes cycliques $C_2$ et $C_3$ et des morphismes $C_2 \to S_3$ et $C_3 \to S_3$.)*

**Exercice 3 (nouvel exercice)**

Soit $X$ et $Y$ deux ensembles disjoints. Montrer que le groupe libre $F(X \cup Y)$ sur $X \cup Y$ est le coproduit de $F(X)$ et $F(Y)$ dans la catégorie des groupes. (Ici, $F(X)$ et $F(Y)$ sont les groupes libres sur $X$ et $Y$, respectivement.)

**Exercice 4.**

Soit $A, B, C$ des objets d'une catégorie $\mathscr{C}$. Montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A \sqcup B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C) \sqcap \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C).$$

**Bonus!**

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie qui admet des produits (notés $\sqcap$) et qui possède un objet final $F$. Soit

$$\Big(G, \quad \mu : G \sqcap G \to G, \quad \varepsilon : F \to G, \quad \mathrm{inv} : G \to G\Big)$$

un objet groupe dans la catégorie $\mathscr{C}$.

On a vu dans le cours que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G)$ est un groupe avec opération (notée $\circledast$) définie par

$$f \circledast g = \mu \circ (f \sqcap g),$$

où $f \sqcap g$ est donné par la propriété universelle de $G \sqcap G$ :

$$\begin{tikzcd}
 & & G & \\
G & G \sqcap G \arrow[l, "\mu"'] \arrow[ur, bend left, "p"] \arrow[dr, bend right, "q"'] & & X \arrow[ll, dashed, "f \sqcap g"'] \arrow[ul, bend right, "f"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\
 & & G &
\end{tikzcd}$$

En utilisant cette description de $\circledast$, montrer que $\varepsilon \circ \zeta$ est l'élément neutre, où $\zeta : X \to F$. C'est-à-dire, montrer que $f \circledast (\varepsilon \circ \zeta) = f$ et $(\varepsilon \circ \zeta) \circledast f = f$ pour tout $X \xrightarrow{f} G$.

*(Indication : considérer le diagramme suivant.)*

$$\begin{tikzcd}
 & G & & \\
X \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & G \sqcap G \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[dl] & G \\
 & G & & \\
X \sqcap X \arrow[dr] & & G \sqcap F \arrow[uu] \arrow[uur] & \\
 & X \sqcap F \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$