

Devoir 2

à remettre le 22 octobre 2015

Exercice 1.

Soit A, B, C des groupes abéliens. Montrer que dans la catégorie des groupes abéliens,

a. le produit fibré de $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ est

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C : f(b) = g(c)\};$$

b. la somme amalgamée de $A \xrightarrow{g} C$ et $A \xrightarrow{f} B$ est

$$D = (B \oplus C)/N,$$

où $N = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$.

(Indice: Il faut définir les morphismes α et β associés à D .)

Exercice 2.

Soit A et B deux groupes abéliens. On a vu que le produit direct $A \times B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie des groupes abéliens. En utilisant la propriété universelle du coproduit, montrer que $A \times B$ n'est pas le coproduit de A et B dans la catégorie des groupes.

(Indice: Considérer les groupes cycliques C_2 et C_3 et des morphismes $C_2 \rightarrow S_3$ et $C_3 \rightarrow S_3$.)

Exercice 3 (nouvel exercice)

Soit X et Y deux ensembles disjoints. Montrer que le groupe libre $F(X \cup Y)$ sur $X \cup Y$ est le coproduit de $F(X)$ et $F(Y)$ dans la catégorie des groupes. (Ici, $F(X)$ et $F(Y)$ sont les groupes libres sur X et Y , respectivement.)

Exercice 4.

Soit A, B, C des objets d'une catégorie \mathcal{C} . Montrer que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \sqcup B, C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \sqcap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C).$$

Bonus!

Soit \mathcal{C} une catégorie qui admet des produits (notés \sqcap) et qui possède un objet final F . Soit

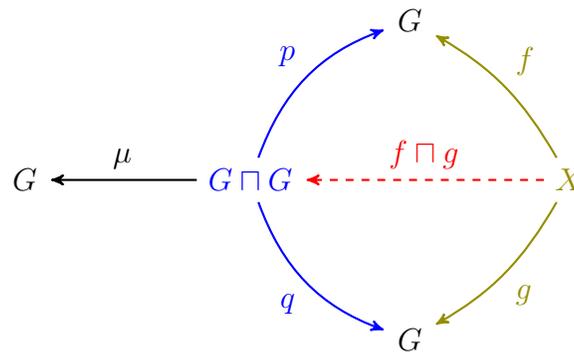
$$(G, \mu : G \sqcap G \rightarrow G, \varepsilon : F \rightarrow G, \text{inv} : G \rightarrow G)$$

un objet groupe dans la catégorie \mathcal{C} .

On a vu dans le cours que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G)$ est un groupe avec opération (notée \otimes) définie par

$$f \otimes g = \mu \circ (f \sqcap g),$$

où $f \sqcap g$ est donné par la propriété universelle de $G \sqcap G$:



En utilisant cette description de \otimes , montrer que $\varepsilon \circ \zeta$ est l'élément neutre, où $\zeta : X \rightarrow F$. C'est-à-dire, montrer que $f \otimes (\varepsilon \circ \zeta) = f$ et $(\varepsilon \circ \zeta) \otimes f = f$ pour tout $X \xrightarrow{f} G$.

(Indication : considérer le diagramme suivant.)

