Devoir 3

à remettre le 12 novembre 2015

Exercice 1. *(Algorithme de Todd-Coxeter)* Soit

$$G = \left\langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^7, (a^{-1}b^{-1}ab)^4 \right\rangle \quad \text{et} \quad H = \left\langle bab^{-1}, aba^{-1} \right\rangle.$$

a. Montrer que $[G : H] = 7$.

b. Montrer que $|H| \leq 24$.

(Indice: Si $x = bab^{-1}$ et $y = aba^{-1}$; montrer que $x^2 = y^3 = (xy)^4 = e$.)

c. En déduire que $|G| = 168$ et que $H \cong S_4$.

Exercice 2. ($\mathbb{R}[x]$*–modules.*) Soit $V = \mathbb{R}^2$. Rappler que V devient un $\mathbb{R}[x]$–module si l'on se donne une application linéaire $T : V \to V$.

a. Soit $T_1 : V \to V$ la rotation par $\pi/2$ dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que V et $\{0\}$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-modules de V.

b. Soit $T_2 : V \to V$ la projection sur la droite $x = 0$. Montrer que V, $\{0\}$, la droite $x = 0$ et la droite $y = 0$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

c. Soit $T_3 : V \to V$ la rotation par π dans le sens horaire autour de l'origine. Montrer que tout sous-espace de V est $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

Exercice 3. Soit R un anneau commutatif. On pose $\mathrm{End}_R(R) = \mathrm{Hom}_R(R, R)$.

a. Montrer que l'application de $\psi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$ définie par $\psi(f) = f(1_R)$ est une isomorphismes de R-modules à gauche.

b. Montrer que l'application $\varphi : R \to \mathrm{End}_R(M)$ définie par $\varphi(r) = r\,\mathrm{Id}_M$, où Id_M est l'application identité sur M, est un morphisme d'anneaux.

c. En déduire que $\mathrm{End}_R(R)$ et R sont isomorphes en tant que R–algèbres.

Exercice 4. Soit R un anneau commutatif, J un idéal de R, et M un R–module. Alors,

$$JM = \left\{ \sum_{\text{somme finie}} j_i\, m_i : j_i \in J, m_i \in M \right\}$$

est un sous-module de M.

a. Montrer que M/JM est un R/J–module si l'on définit la multiplication par :

$$(r + J) \cdot (m + JM) = rm + JM$$

b. Montrer que si $JM = \{0\}$, alors on peut munir M d'une structure de R/J–module.

c. Soit I un idéal maximal de R et F un R–module libre avec base B. Montrer que F/IF est un espace vectoriel sur R/I et que $\{b + IF : b \in B\}$ est une base de F/IF.