Devoir 4

à remettre le 8 décembre 2015

Exercice 1. Soit n un entier positif.

a. Trouver la longueur d'une suite de composition du $\mathbb{Z}$–module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b. Caractériser les n pour lesquels $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet une suite de composition unique.

Exercice 2. Soit M un R–module et $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Montrer les énoncés suivants.

a. Si M est noethérien et si f est un épimorphisme, alors f est un automorphisme.

b. Si M est artinien et si f est un monomorphisme, alors f est un automorphisme.

c. Si M admet une suite de composition, alors les conditions suivantes sont équivalentes pour tout $f \in \mathrm{End}_R(M)$:

(i) f est un épimorphisme ;

(ii) f est un monomorphisme ;

(iii) f est un isomorphisme.

Exercice 3. Soit M un R–module artinien et noethérien et $f \in \mathrm{End}_R(M)$. Trouver une décomposition de M en somme directe $M = M' \oplus M''$ telle que la restriction de f à M' soit nilpotente et la restriction de f à M'' soit inversible.

Exercice 4. Soit M un R–module indécomposable tel que $\mathrm{End}_R(M)$ soit un anneau local d'idéal maximal I. Montrer que, pour tout module N et tous morphismes $f : M \to N$ et $g : N \to M$, on a $g \circ f \in I$ ou que M est un facteur direct[1] de N.

Exercice 5. Soit $\ell : R\text{-Mod} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une application définie sur les R–modules vérifiant les propriétés suivantes pour tout R–module M :

(i) Si $M = \{0\}$ est le R–module trivial, alors $\ell(M) = 0$.

(ii) M est simple ssi $\ell(M) = 1$.

(iii) Si N est un sous-module propre de M et $\ell(M) < \infty$, alors $\ell(N) < \ell(M)$.

(iv) Si $N \leq M$, alors $\ell(M) < \infty$ ssi $\ell(N) < \infty$, $\ell(M/N) < \infty$; et dans ce cas,

$$\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N).$$

Montrer que $\ell(M) < \infty$ ssi M admet une suite de composition de longueur $\ell(M)$.

1. M est un *facteur direct* de N s'il existe un module M' tel que $N \cong M \oplus M'$.

Bonus!

Soit k un corps commutatif et $f(x) \in k[x]$ un polynôme. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $g(x) \in k[x]$ tel que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, si le coefficient de x^m dans $f(x)g(x)$ est non nul, alors m est premier. Par exemple, pour $f(x) = x^5 + x^4 + 1$, on a

$$(x^5 + x^4 + 1)(x^8 - x^7 - x^3) = x^{13} - x^{11} - 2x^7 - x^3.$$

(Indice: $k[x]/\langle f(x)\rangle$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.)