Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Exercice 5.1.1 dans les notes de course de Luc Bélair. (Il s'agit d'une série d'exercices pour montrer que l'axiome du choix entraîne le lemme de Zorn).

Exercice 2. Montrer que tout anneau unitaire et non-triviale ($0 \neq 1$) possède un idéal maximal propre. *(Remarque : L'hypothèse que l'anneau soit unitaire est important : autrement, le résultat est faux !)*

Exercice 3. *(Principe de maximalité de Hausdorff)* Montrer que tout ensemble partiellement ordonné contient une chaîne maximale pour l'inclusion.

Exercice 4. Un *arbre couvrant* d'un graphe G est un arbre inclus dans G et qui connecte tous les sommets du graphe. Montrer que tout graphe connexe (éventuellement infini) possède un arbre couvrant.

Exercice 5. *(Sur les nombres ordinaux)* Soit α un nombre ordinal.

a. Montrer que $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un nombre ordinal.

b. Montrer que tout élément de α est un nombre ordinal. C'est-à-dire, montrer que si $\beta \in \alpha$, alors β est un nombre ordinal.

c. Un *segment initial* de α est une partie $A \subseteq \alpha$ qui vérifie la propriéte suivante :

$$\text{si } x \in A,\ y \in \alpha, \text{ et } y < x, \text{ alors } y \in A.$$

Montrer que tout segment initial A de α est un ordinal et que soit $A \in \alpha$ soit $A = \alpha$.

d. Montrer que si α et β sont deux ordinaux, alors soit $\alpha \in \beta$, soit $\alpha = \beta$, soit $\beta \in \alpha$.

(Indice: Montrer que l'intersection $A = \alpha \cap \beta$ est un segment initial.)