Feuille d'exercices 3

Exercice 1.
Soit $\mathcal{P}$ la catégorie d'un poset $(P, \leq_P)$; et $\mathcal{P}'$ la catégorie d'un poset $(P', \leq_{P'})$.

a. Est-ce que la catégorie $\mathcal{P}$ admet un objet initial ? final ? nul ? Si oui, donner une description de l'objet en termes de l'ensemble partiellement ordonné $(P, \leq_P)$.

b. Décrire le produit et le coproduit de deux objets de la catégorie $\mathcal{P}$.

c. Décrire le produit fibré et la somme amalgamée dans $\mathcal{P}$.

d. Montrer que la donnée d'un foncteur $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ revient à donnée une fonction croissante $f : P \to P'$ (si $x \leq_P y$, alors $f(x) \leq_{P'} f(y)$ pour tous $x, y \in P$).

e. Montrer que la donnée d'un foncteur contravariant $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ revient à donnée une fonction décroissante $f : P \to P'$ (si $x \leq_P y$, alors $f(x) \geq_{P'} f(y)$ pour tous $x, y \in P$).

Exercice 2. Soit $\mathcal{G}$ la catégorie associée à un groupe G.

a. Décrire les objets initials, finals, et nuls de $\mathcal{G}$.

b. Décrire le produit et le coproduit de deux éléments de $\mathcal{G}$.

c. Décrire le produit fibré et la somme amalgamée dans $\mathcal{G}$.

d. Soit $\mathcal{G}'$ la catégorie d'un groupe G'. Décrire les foncteurs $F : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$.

e. Décrire les transformations naturelles entre deux foncteurs $F_1, F_2 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$.

Exercice 3. Soit B et C deux sous-ensembles d'un ensemble A. Montrer que :

a. le produit fibré dans **Ens** de $B \xrightarrow{\mathrm{incl}_B} A$ et $C \xrightarrow{\mathrm{incl}_C} A$ est $B \cap C$; et

b. la somme amalgamée dans **Ens** de $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} B$ et $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} C$ est $B \cup C$.

Exercice 4. Soit F un objet final dans la catégorie **Ens**.

a. Montrer qu'il y a une bijection entre les éléments d'un ensemble A et les morphismes de **Ens** de la forme $F \to A$.

b. Si $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme de **Ens**, montrer qu'il y a une bijection entre les éléments de $\mathrm{im}(f)$ et les morphismes de la forme $F \to A \xrightarrow{f} B$.

Exercice 5. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, I un objet initial de $\mathscr{C}$ et F un objet final de $\mathscr{C}$.

a. Montrer que tout morphisme de la forme $A \to I$ admet un inverse à droite.

b. Montrer que tout morphisme de la forme $F \to B$ admet un inverse à gauche.

c. Montrer que s'il existe un morphisme de F vers I dans $\mathscr{C}$, alors F et I sont isomorphes.

Exercice 6. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie qui possède un objet final F et qui admet produits ($\sqcap$).

a. Montrer que $F \sqcap A \cong A \cong A \sqcap F$.

b. Montrer que $(A \sqcap B) \sqcap C \cong A \sqcap (B \sqcap C)$ pour tous $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Exercice 7. Soit

$$\Big((G, *), \quad \mu : G \times G \to G, \quad \varepsilon : F \to G, \quad \mathrm{inv} : G \to G\Big)$$

un objet groupe dans la catégorie des groupes. Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.