Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Montrer que la catégorie des groupes finis n'admet pas de coproduit. Plus précisément, montrer qu'il n'existe pas un groupe fini qui est le coproduit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

a. Montrer que $(\mathbb{Q},+)$ est engendré par $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$.

b. Montrer que $(\mathbb{Q},+)$ est engendré par $\left\{\frac{1}{n!} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$.

c. Montrer que $(\mathbb{Q},+)$ n'admet pas une présentation finie.

Exercice 3. *(Présentation de $\mathbb{Q}$)* Montrer que $(\mathbb{Q},+)$ admet pour présentation

$$\left\langle \{s_i : i \in \mathbb{N}, i > 0\} \;\middle|\; \{s_i^i = s_{i-1} : i \in \mathbb{N}, i > 1\} \right\rangle.$$

Exercice 4. *(Une présentation du groupe alterné A_n)* Montrer que A_n admet pour présentation

$$\left\langle \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}\} \;\middle|\; \left\{s_1^3 = e\right\} \cup \left\{s_i^2 = e : 1 < i \leq n-2\right\} \cup \left\{(s_i s_j)^2 : 1 \leq i < j-1 \leq n-2\right\} \right\rangle.$$

(Indice: $(1,2)(i+1,i+2)$)

Exercice 5. *(Une présentation du groupe alterné A_n)* Montrer que A_n admet pour présentation

$$\left\langle \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}\} \;\middle|\; \left\{s_i^3 : 1 \leq i < j \leq n-2\right\} \cup \left\{(s_i s_j)^2 : 1 \leq i < j \leq n-2\right\} \right\rangle.$$

(Indice: $(i,n-1,n)$ ou $(1,i+1,n)$)

Exercice 6. Dans le cours on a vu deux présentations du groupe alterné A_4 :

$$\left\langle x, y \;\middle|\; x^2, y^3, xyxyxy \right\rangle$$
$$\left\langle a, b \;\middle|\; a^3, b^3, abab \right\rangle$$

Donner un isomorphisme explicit entre les groupes.

Exercice 7. Soit G un groupe d'ordre 12 qui ne possède pas de sous-groupe d'ordre 6. Montrer que G est isomorphe au groupe alterné A_4. *(En particulier, ceci entraîne que A_4 ne possède pas un sous-groupe d'order 6.)*

Exercice 8. Soit H, K deux sous-groupes d'un groupe G tels que $H \cap K = \{e\}$ et $G = HK$, et μ l'application définie par

$$\begin{aligned} \mu : H \times K &\longrightarrow G \\ (h,k) &\longmapsto hk. \end{aligned}$$

a. Montrer que μ est une application bijective. *(En fait, pour $H, K \leq G$, l'application $\mu : H \times K \to G$ définie par $\mu(h,k) = hk$ est bijective ssi $G = HK$ et $H \cap K = \{e\}$.)*

b. On définit une opération $\circledast$ sur l'ensemble $H \times K$ par

$$(h,k) \circledast (h',k') = \mu^{-1}(hkh'k').$$

Montrer que $H \times K$ muni de l'opération $\circledast$ est un groupe qui est isomorphe à G.

c. Montrer que si $H \lhd G$, alors $(H \times K, \circledast)$ est le produit semi-direct de H et K. Explicitement, montrer que si $H \lhd G$, alors

$$(h,k) \circledast (h',k') = \Big(h(kh'k^{-1}),\, kk'\Big).$$

d. Montrer que si $H \lhd G$ et $K \lhd G$, alors $(H \times K, \circledast)$ est le produit direct de H et K. Explicitement, montrer que si $H \lhd G$ et $K \lhd G$, alors

$$(h,k) \circledast (h',k') = \Big(hh', kk'\Big).$$

e. Soit

$$G = S_4,\ H = \langle (1,2,3,4), (1,2)(3,4) \rangle, \text{ et } K = \langle (1,2,3) \rangle.$$

Montrer que G est isomorphe à $(H \times K, \circledast)$.

f. Soit
- $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- $H = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$ *orthogonales* à coefficients dans $\mathbb{R}$; et
- $K = \mathrm{TS}(\mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$ *triangulaires supérieures* à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Montrer que G est isomorphe à $(H \times K, \circledast)$.