Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit a et b des éléments d'un groupe libre F. Montrer que :

a. Si $a^n = b^n$ avec $n > 1$, alors $a = b$.

b. Si $a^m b^n = b^n a^m$ avec $mn \neq 0$, alors $ab = ba$.

c. Si l'équation $x^n = a$ admet une solution x pour tout n, alors $a = 1$.

Exercice 2. Soit F_n le groupe libre sur n générateurs.

a. Montrer que si $n < m$, alors F_n est isomorphe à un sous-groupe de F_m ainsi qu'un groupe quotient de F_m.

b. Montrer que $F_1 \times F_1$ n'est pas un groupe libre.

c. Montrer que le centre $Z(F_n)$ est trivial si $n > 1$.

Exercice 3. Montrer que le groupe donné par les générateurs $a_1, \ldots, a_n$ et les relations $[a_i, a_j] = a_i a_j a_i^{-1} a_j^{-1}$, pour $i \neq j$ est le groupe abélien libre sur $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Exercice 4. Soit $G = \langle a, b, c \mid a^3, b^3, c^4, acac^{-1}, aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$. Montrer que G est trivial.

(Indice: Considérer $(aba^{-1})^3 = (bcb^{-1})^3$.)

Exercice 5. Soit $G = \langle s, t \mid t^{-1}s^3t = s^5 \rangle$. Montrer que l'élément

$$s^{-1}t^{-1}s^{-1}tst^{-1}st$$

appartient à $\ker(f)$ pour tout morphisme de groupes $f : G \to G'$ avec G' fini.

Exercice 6. Soit $G = \langle x, y \mid x^3, y^3, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$ et $H = \langle x \rangle$. Calculer G et les permutations des classes à droite de H induites par l'action de G.

Exercice 7. Soit $G = \langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^3 \rangle$ et $H = \langle xy \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et les permutations des classes à droite de H induites par l'action de G.

Exercice 8. Soit $G = \langle x, y \mid x^2y^2, x^3y^5 \rangle$ et $H = \langle 1 \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et les permutations des classes à droite de H induites par l'action de G.

Exercice 9. Soit $G = \langle a, b, c, d, e \mid ab = c, bc = d, cd = e, de = a, ea = b \rangle$ et $H = \langle a \rangle$.

a. Calculer $[G : H]$.

b. Calculer l'action de G sur les classes à droite de H.

c. En déduire que G est un groupe abélien d'ordre 11.

Exercice 10. Soit $G = \langle x, y \rangle$ et $H = \langle x, y^2, yxyx^{-1}y^{-1}, yx^2yx^{-3}y^{-1}, yx^4y^{-1}, yx^3yx^{-2}y^{-1} \rangle$. Montrer que $[G : H] = 5$.

Exercice 11. Montrer que $G = \langle x, y \mid x^2y^2, y^{-1}xyx^{-3} \rangle$ est un groupe d'ordre 8. Lequel ?

Exercice 12. Montrer que $G = \langle a, b \mid a^4, b^2, abab^{-1} \rangle$ est un groupe d'ordre 8. Lequel ?

Exercice 13. Calculer l'ordre de $G = \langle a, b \mid a^5, b^3, a^2ba^{-1}b^{-1} \rangle$.

Exercice 14. Montrer que $G = \langle a, b \mid a^2, b^2, abab \rangle$ est isomorphe au groupe de Klein.

Exercice 15. Soit $G = \langle x, y \mid x^2, y^3, (xy)^4 \rangle$ et $H = \langle xy \rangle$. Montrer que $[G : H] = 6$ et que $G \cong S_4$.

Exercice 16. Soit $G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle$ et $H = \langle xy, x^{-1}y^{-1}xyx \rangle$. Déterminer $[G : H]$ et les permutations des classes à droite de H induites par l'action de G.