

## Feuille d'exercices 6

**Exercice 1.** Soit  $M$  un  $R$ -module à gauche.

- a. Montrer que  $0_R \cdot m = 0_M$  pour tout  $m \in M$ .
- b. Montrer que  $r \cdot 0_M = 0_M$  pour tout  $r \in R$ .
- c. Montrer que  $(-1_R) \cdot m = -m$  pour tout  $m \in M$ .

**Exercice 2.** Soit  $M$  un  $R$ -module à droite. Soit  $a \in R$  et  $m \in M$  non-nul tels que  $m \cdot a = 0_M$ . Montrer que  $a$  ne possède pas un inverse à droite (c'est-à-dire, il n'existe pas de  $b \in R$  tel que  $ab = 1_R$ ).

**Exercice 3.** Soit  $R$  et  $S$  deux anneaux et  $\phi : S \rightarrow R$  un morphisme d'anneaux. Si  $M$  est un  $R$ -module à gauche, montrer que  $M$  est aussi un  $S$ -module à gauche si l'on définit

$$s \cdot m = \phi(s) \cdot m$$

pour tout  $s \in S$  et pour tout  $m \in M$ .

**Exercice 4.** Soit  $N, N'$  deux sous-modules d'un  $R$ -module  $M$ .

- a. Montrer que  $N \cap N'$  est un sous-module de  $M$ .
- b. Montrer que  $N + N' = \{n + n' : n \in N, n' \in N'\}$  est un sous-module de  $M$ .

**Exercice 5.** Soit  $f : M \rightarrow M'$  un morphisme de  $R$ -modules à gauche.

- a. Montrer que  $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$  est un sous-module de  $M$ .
- b. Montrer que  $\text{im}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$  est un sous-module de  $M'$ .
- c. Soit  $U'$  un sous-module de  $M'$ . Montrer que  $f^{-1}(U')$  est un sous-module de  $M$ .

**Exercice 6.** Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de  $R$ -modules à gauche et  $K$  un sous-module de  $M$  tel que  $K \subseteq \ker(f)$ . Montrer que la correspondance

$$\begin{aligned} \widehat{f} : M/K &\longrightarrow N \\ m + K &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

est un morphisme de  $R$ -modules. (*Il faut aussi montrer que  $\widehat{f}$  est bien défini.*)

**Exercice 7.** Soit  $R$  un anneau intègre (c'est-à-dire,  $R$  est commutatif,  $R$  est unitaire, et si  $a, b \in R$  sont non nuls, alors  $ab$  est non nul). Pour un  $R$ -module à gauche  $M$ , on définit

$$\text{Tor}(M) = \{m \in M : \text{il existe } a \in R \text{ non-nul tel que } a \cdot m = 0\}.$$

- a. Montrer que  $\text{Tor}(M)$  est un sous-module de  $M$ .
- b. Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un morphisme de  $R$ -modules. Montrer que  $\varphi(\text{Tor}(M)) \subseteq \text{Tor}(N)$ .

**Exercice 8.** (*Propriété universelle de  $\ker(f)$* ) Soit  $f : M \rightarrow N$  un morphisme de  $R$ -modules. On montrera que le noyau  $K$  de  $f$  est uniquement déterminé par la propriété suivante :

- (i) il existe un morphisme de  $R$ -modules  $\ell : K \rightarrow M$  tel que  $f \circ \ell = 0$ ; et
- (ii) si  $\ell' : K' \rightarrow M$  est un morphisme de  $R$ -modules tel que  $f \circ \ell' = 0$ , alors il existe un unique morphisme de  $R$ -modules  $u : K' \rightarrow K$  tel que  $\ell' = \ell \circ u$ .

**Exercice 9.** Soit  $M$  un  $R$ -module à droite et  $X \subseteq M$  un sous-ensemble quelconque. On définit l'*annulateur*  $\text{Ann}_R(X)$  de  $X$  dans  $R$  comme étant l'ensemble

$$\text{Ann}_R(X) = \{a \in R : x \cdot a = 0 \text{ pour tout } x \in X\}.$$

- a. Montrer que  $\text{Ann}_R(X)$  est un idéal à droite de  $R$ .
- b. Montrer que si  $X$  est un sous-module de  $M$  alors  $\text{Ann}_R(X)$  est un idéal bilatère de  $R$ .
- c. Montrer que  $M$  admet une structure naturelle de  $R/\text{Ann}_R(M)$ -module (à droite).
- d. Un module  $M$  est dit *fidèle* si  $\text{Ann}_R(M) = 0$ . Montrer que tout  $R$ -module  $M$  est fidèle en tant que  $R/\text{Ann}_R(M)$ -module.

**Exercice 10.** Soit  $M$  un  $R$ -module à droite. Montrer que  $M$  est simple ssi pour tout  $m \in M$  non-nul, on a que  $M = \{m \cdot a : a \in R\}$ .

**Exercice 11.** Soit  $R$  un anneau commutatif.

- a. Soit  $M$  un  $R$ -module. Montrer que  $\text{End}_R(M)$  est un  $R$ -algèbre.
- b. Montrer que  $\text{Mat}_{n \times n}(R)$  est un  $R$ -algèbre.

**Exercice 12.** Soit  $R$  un anneau intègre et  $I$  un idéal (à gauche) principal non nul de  $R$ . Montrer que  $I \cong R$  en tant que  $R$ -modules.

**Exercice 13.** Soit  $R$  un anneau commutatif et  $I$  et  $J$  des idéaux de  $R$ . Montrer que l'on a un isomorphisme de  $R$ -modules  $I \cdot (R/J) \cong (I + J)/J$ .

**Exercice 14.** Montrer que tout  $R$ -module est isomorphe à un quotient d'un  $R$ -module libre.

**Exercice 15.** Soit  $N$  un sous-module d'un  $R$ -module  $M$ . Montrer que si  $M/N$  et  $N$  sont de type fini, alors  $M$  est de type fini.

**Exercice 16.** Soit  $N$  un  $R$ -module et  $M$  un  $R$ -module monogène.

- a. Montrer que  $M \cong R/I$ , où  $I$  est un idéal à gauche de  $R$ .
- b. Montrer que  $\text{Hom}_R(M, N) \cong \{n \in N : an = 0 \text{ pour tout } a \in I\}$ .
- c. Pour  $a, b \in \mathbb{Z}$ , montrer que  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$ .

**Exercice 17.** Soit  $R$  un anneau commutatif,  $M$  un  $R$ -module et  $a \in R$  un élément nilpotent. Montrer que  $aM$  est un sous-module de  $M$ . Montrer que  $aM = M$  ssi  $M = 0$ .