Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Soit R un anneau. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a. R est un anneau local.

b. R possède un unique idéal à gauche maximal.

c. R possède un unique idéal à droite maximal.

d. L'ensemble des éléments non inversibles de R est un idéal bilatère maximal de R.

e. Pour chaque $x \in R$, au moins un des éléments x ou $1 - x$ est inversible.

Exercice 2. Soit R un anneau et I un idéal bilatère de R tel que l'anneau quotient R/I soit local. Montrer que R est local.

Exercice 3. Soit R un anneau et soit J l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de R. Montrer que R est local ssi J est un idéal maximal de R.

Exercice 4. Soit

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \text{ avec } m \text{ impair} \right\}.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_{(2)}$ est un anneau local.

Exercice 5. Soit $p : M \to M$ un morphisme de R–modules tel que $p^2 = p$. Montrer que $M \cong \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$.

Exercice 6. Soit ${}_RM$ un non nul et ${}_RN$ indécomposable. Si $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ et $\beta \in \operatorname{Hom}_R(N, M)$ sont tels que $\beta \circ \alpha$ est un isomorphisme, alors α et β sont des isomorphismes.

Exercice 7. Soit k un corps commutative et V un k-espace vectoriel. Montrer que V est de longueur finie (en tant que k–module) ssi il est de dimension finie. Montrer que la longueur de V coincide avec la dimension de V.

Exercice 8. Soit R un anneau intègre qui n'est pas un corps et F un R–module libre. Montrer que F est de longueur finie ssi $F = 0$.

Exercice 9. Soit M un R–modules et $e \in R$ un idempotent.

a. Montrer que $eM \cong \operatorname{Hom}_R(Re, M)$.

b. Montrer que $eRe \cong \operatorname{End}_R(Re)^{opp}$.

Exercice 10. Soit e et f deux idempotents de R. Montrer que e et f sont conjugués ssi $Re \cong Re'$ et $R(1 - e) \cong R(1 - f)$.

(Rappel : on dit que x et y sont conjugués s'il existe un élément inversible $a \in R$ tel que $x = aya^{-1}$.)

Exercice 11. Soit M un R–module qui admet une suite de composition, et A, B et C des sous-modules de M. Montrer que

$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) \quad \text{et} \quad (A \cap B) + C = (A + C) \cap (B + C)$$

ssi M ne possède pas un quotient d'un sous-module qui est isomorphe à la somme directe de deux modules simples.