Feuille d'exercices 8

Sur le radical de Jacobson

Exercice 1. Soit R un anneau. Soit J l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de R. Montrer que si $a \in J$, alors $1 - a$ admet un inverse à gauche dans R.

Exercice 2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

a. $x \in \mathrm{rad}(R)$.

b. Pour tout $r \in R$, l'élément $1 + rx$ possède un inverse à gauche.

c. Pour tout $r \in R$, l'élément $1 + rx$ est inversible.

d. Pour tout $r, s \in R$, l'élément $1 + rxs$ est inversible.

Exercice 3. Soit R un anneau *commutatif* et $N(R)$ l'ensemble d'éléments nilpotents de R.

a. Montrer que $N(R)$ est un idéal de R.

b. Montrer que si R est noethérien, alors $N(R)$ est nilpotent.

Forme Normale de Smith

Exercice 4. Montrer que la forme normale de Smith sur $\mathbb{C}[x]$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -1 & 2 & x-3 \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2-4x+2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit B la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la décomposition en somme directe de $\mathbb{Q}[x]$–modules indécomposables du $\mathbb{Q}[x]$–module $\mathbb{Q}^4$ induite par B. *(Indice: Calculer la forme normale de Smith de $xI_4 - B$.)*

Exercice 6. Soit N le sous-module de $\mathbb{Z}^3$ engendré par

$$v_1 = (2, 1, -3),$$
$$v_2 = (1, -1, 2).$$

Montrer que $\mathbb{Z}^3/N$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit G un groupe abélien engendré par trois éléments x_1, x_2, x_3 tels que

$$2x_1 - x_2 = 0, \qquad x_1 - 3x_2 = 0, \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Montrer que $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. *(Indice: Calculer la forme normale de Smith de $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.)*