# Devoir 1

à remettre le 6 octobre 2020

(mis-à-jour le 29 septembre 2020)

**Exercice 1.** Soit $G$ le sous-groupe de $S_7$ engendré par les permutations

$$a = (1\,2)(3\,4) \qquad \text{et} \qquad b = (2\,3\,5)(4\,6\,7).$$

En utilisant les algorithmes vus en classe :

*a.* Calculer l'orbite $\mathrm{Orb}_G(1)$ et un système de représentants de $\mathrm{Stab}_G(1)$ dans $G$.

*b.* Montrer que $\mathrm{Stab}_G(1) = \Big\langle (2\,3\,5)(4\,6\,7), (3\,4)(5\,7) \Big\rangle$.

*c.* Calculer une base $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ pour $G$.

*d.* Calculer l'ordre de $G$.

*e.* Déterminer si les permutations suivantes sont des éléments de $G$.
Si oui, exprimer la permutation comme un produit de générateurs de $G$.

$$\rho = (1\,7\,4)(2\,5)(3\,6) \qquad \sigma = (1\,5\,4\,3\,2\,6\,7) \qquad \tau = (1\,3\,6\,2\,5\,7\,4)$$

**Exercice 2.** *(Algorithme de Todd-Coxeter)*
Posons

$$G = \langle x, y \mid x^3, y^5, (xy)^2 \rangle \quad \text{et} \quad H = \langle x, yx^{-1}y^2 \rangle\,.$$

*a.* Montrer que $[G : H] = 5$.

*b.* Soit $a = x$ et $b = yx^{-1}y^2$ les générateurs de $H$. Montrer que $a^3 = b^3 = (ab)^2 = e$, où $e$ est l'élément neutre de $G$.

*c.* En déduire que $|H| \leq 12$.

*d.* Montrer que $|G| = 60$.

*e.* Montrer que $G \cong A_5$.