Devoir 2

à remettre le 10 novembre 2020

(précisions ajoutées le 4 novembre 2020)

Exercice 1.

Soit R un anneau commutatif et N et M deux R-modules. L'ensemble

$$\mathrm{Hom}_R(N, M) = \left\{ f : N \to M \;\middle|\; f \text{ est un morphisme de } R\text{-modules} \right\}$$

est un R-module, où :

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a) \qquad \text{et} \qquad (rf)(a) = r\, f(a)$$

pour tous $f, g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, $a \in N$ et $r \in R$.

Soit R un anneau commutatif. On pose $\mathrm{End}_R(R) = \mathrm{Hom}_R(R, R)$.

a. Montrer que l'application de $\psi : \mathrm{Hom}_R(R, M) \to M$ définie par $\psi(f) = f(1_R)$ est une isomorphismes de R-modules à gauche, où 1_R est l'unité de R.

b. Montrer que l'application $\varphi : R \to \mathrm{End}_R(M)$ définie par $\varphi(r) = r\,\mathrm{Id}_M$ est un morphisme d'anneaux, où Id_M est l'application identité sur M.

Exercice 2. Soit A, B, C des objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ qui admet des coproduits (noté $\sqcup$). Montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \sqcup B, C)$ est un produit pour $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Exercice 3. Soit $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ deux morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$. On dit que

$$\left(D,\ D \xrightarrow{\alpha} C,\ D \xrightarrow{\beta} B\right)$$

est un *produit fibré* de f et g si $g \circ \alpha = f \circ \beta$ et si

pour tout objet X et morphismes $X \xrightarrow{\alpha'} C$ et $X \xrightarrow{\beta'} B$ tels que $g \circ \alpha' = f \circ \beta'$, il existe un unique morphisme $\Theta : X \to D$ tel que $\alpha' = \alpha \circ \Theta$ et $\beta' = \beta \circ \Theta$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\Theta"] \arrow[drr, bend left, "\alpha'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "g"] \\
& B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

Soit $\left(D,\ D \xrightarrow{\alpha} C,\ D \xrightarrow{\beta} B\right)$ un produit fibré des morphismes f et g dans une catégorie $\mathcal{C}$. Montrer que si f est un monomorphisme, alors α est un monomorphisme.