

Devoir 2

à remettre le 10 novembre 2020
(précisions ajoutées le 4 novembre 2020)

Exercice 1.

Soit R un anneau commutatif et N et M deux R -modules. L'ensemble

$$\text{Hom}_R(N, M) = \left\{ f : N \rightarrow M \mid f \text{ est un morphisme de } R\text{-modules} \right\}$$

est un R -module, où :

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \quad \text{et} \quad (rf)(a) = r f(a)$$

pour tous $f, g \in \text{Hom}_R(N, M)$, $a \in N$ et $r \in R$.

Soit R un anneau commutatif. On pose $\text{End}_R(R) = \text{Hom}_R(R, R)$.

- Montrer que l'application $\psi : \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M$ définie par $\psi(f) = f(1_R)$ est un isomorphisme de R -modules à gauche, où 1_R est l'unité de R .
- Montrer que l'application $\varphi : R \rightarrow \text{End}_R(M)$ définie par $\varphi(r) = r \text{Id}_M$ est un morphisme d'anneaux, où Id_M est l'application identité sur M .

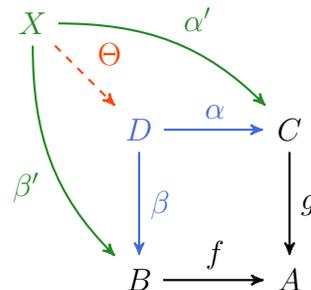
Exercice 2. Soit A, B, C des objets d'une catégorie \mathcal{C} qui admet des coproduits (noté \sqcup). Montrer que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A \sqcup B, C)$ est un produit pour $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$.

Exercice 3. Soit $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ deux morphismes d'une catégorie \mathcal{C} . On dit que

$$(D, D \xrightarrow{\alpha} C, D \xrightarrow{\beta} B)$$

est un *produit fibré* de f et g si $g \circ \alpha = f \circ \beta$ et si

pour tout objet X et morphismes $X \xrightarrow{\alpha'} C$ et $X \xrightarrow{\beta'} B$ tels que $g \circ \alpha' = f \circ \beta'$, il existe un unique morphisme $\Theta : X \rightarrow D$ tel que $\alpha' = \alpha \circ \Theta$ et $\beta' = \beta \circ \Theta$.



Soit $(D, D \xrightarrow{\alpha} C, D \xrightarrow{\beta} B)$ un produit fibré des morphismes f et g dans une catégorie \mathcal{C} . Montrer que si f est un monomorphisme, alors α est un monomorphisme.