Devoir 3

à remettre le 1 décembre 2020

Exercice 1. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur plein et fidèle.

a. Si f est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$, montrer que f est un isomorphisme.

b. Si X et Y sont des objets dans $\mathcal{C}$ tels que $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes dans $\mathcal{D}$, montrer que X et Y sont isomorphes dans $\mathcal{C}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Montrer que si A et B sont isomorphe, alors il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -)$.

Exercice 3. Soit M un R-module, L un R-module libre et $M \xrightarrow{g} L$ un épimorphisme.

a. Montrer qu'il existe un morphisme de R-modules $L \xrightarrow{h} M$ tel que $g \circ h = \mathrm{Id}_L$.

b. Montrer que $M \cong \ker(g) \oplus L$. (indice: *montrer que* $M \cong \ker(g) \oplus \mathrm{im}(h)$)

Exercice 4. Soit M un R-module et $f : M \to M$ un morphisme de R-modules.

a. Montrer que si M est artinien et f est injectif, alors f est un isomorphisme.
(indice: *Considérer* $\mathrm{im}(f), \mathrm{im}(f^2), \mathrm{im}(f^3), \ldots$)

b. Montrer que si M est noethérien et f est surjectif, alors f est un isomorphisme.
(indice: *Considérer* $\ker(f), \ker(f^2), \ker(f^3), \ldots$)

c. En déduire que les conditions suivantes sont équivalentes pour tout endomorphisme $f \in \mathrm{End}_R(M)$ d'un module M noethérien et artinien.

(i) f est surjectif;
(ii) f est injectif;
(iii) f est un isomorphisme.