Devoir 4

à remettre le lundi 21 décembre 2020

Exercice 1. Soit R un anneau noethérien commutatif et M et N des R-modules de type fini. L'objectif de l'exercice est de montrer que le R-module $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ est de type fini.

a. Expliquer pourquoi il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ est isomorphe à un sous-module d'un module noethérien.

b. Expliquer pourquoi il existe $n \in \mathbb{N}$ et un sous-module $K \subseteq R^n$ tel que $M \cong R^n/K$;
en déduire que $\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(R^n/K, N)$. (*Indice: considérer une surjection* $R^n \to M$)

c. Montrer que $\mathrm{Hom}_R(R^n/K, N)$ est isomorphe au sous-module suivant de $\mathrm{Hom}_R(R^n, N)$:

$$S = \{f \in \mathrm{Hom}_R(R^n, N) : \ker(f) \supseteq K\}\,.$$

d. Montrer que $\mathrm{Hom}_R(R^n, N) \cong N^n$.

e. En déduire que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ est isomorphe à un sous-module de N^n et qu'il est de type fini.

Exercice 2. Soit M un R-module artinien et noethérien et f un endomorphisme de M. Trouver une décomposition de M en somme directe $M = M' \oplus M''$ telle que la restriction de f à M' soit nilpotente et la restriction de f à M'' soit inversible. (*Indice: Lemme de Fitting*)

Exercice 3. Soit R un anneau, et N et N' deux sous-modules d'un R–module M. Montrer que si M/N est noethérien (resp. artinien), alors $M/(N + N')$ est noethérien (resp. artinien).
(*Indice: Théorèmes d'isomorphisme*)

Exercice 4. Montrer qu'un R-module M est semisimple ssi il vérifie la propriété suivante :

pour tout R-morphisme *injectif* $j : N \to M$ et tout R-morphisme $f : N \to N'$,
il existe un R-morphisme $\widehat{f} : M \to N'$ tel que $\widehat{f} \circ j = f$.