Feuille d'Exercices 1

Actions de groupes

Exercice 1. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G. On définit, pour tout $(h,k) \in H \times K$ et pour tout $x \in HK$,

$$(h,k) \bullet x = hxk^{-1}$$

Vérifier que cela est une action du groupe $H \times K$ sur l'ensemble HK.

Exercice 2. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E tel que l'action possède une et une seule orbite. Soit $x, y \in E$.

a. Montrer que $\{g \in G : g \bullet x = y\}$ est un classe à gauche de $\operatorname{Stab}_G(x)$.

b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G/\operatorname{Stab}_G(x) \\ y & \longmapsto & \{g \in G : g \bullet x = y\} \end{array}$$

est une bijection.

Exercice 3. Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.

a. Expliquer pourquoi la cardinalité d'une orbite de cette action est 1, 3, 7 ou 21.

b. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Montrer que

$$|E| = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}.$$

c. Montrer que si $|E| = 11$, alors il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.

d. On suppose que $|E| = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Parties génératrices d'un groupe

Exercice 4. Soit S une partie génératrice d'un groupe fini G. Montrer que tout élément de G s'exprime comme produit des éléments de S.

(*Indice: La conclusion n'est pas vrai si G n'est pas fini.*)

Exercice 5.

a. Soit S un sous-ensemble de G. Montrer que S n'engendre pas G ssi elle est contenue dans un sous-groupe propre de G.

b. Montrer que tout groupe fini G possède une partie génératrice avec au plus $\log_2(|G|)$ éléments.

Algorithme `Orbite/Stabilisateur`

Exercice 6. Appliquer l'algorithme `Orbite/Stabilisateur` vu en classe à un groupe fini monogène. Combien de générateurs de Schreier nontrivial produira-t-il ?

Exercice 7. Soit $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ une base pour un groupe de permutations G. Montrer que pour tous $g, h \in G$, on a que $g = h$ ssi $g(x_i) = h(x_i)$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. *(Autrement dit, pour déterminer si deux éléments de G coincident, il suffit de comparer leurs actions sur les éléments de la base.)*

Rappel sur les groupes symétriques S_n

Exercice 8.

a. Donner un exemple d'un homomorphisme non-trivial de $\mathbb{Z}$ dans S_3.

b. Est-il possible de construire un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}$ dans S_3 ?

Exercice 9. Soit $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l)$ un cycle dans S_n. La *longueur* de α est l. Le *support* de α est l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l\}$. On dit que deux cycles sont à *disjoint* si leurs supports sont disjoint.

a. Montrer que $\alpha^{-1} = (a_l, a_{l-1}, \ldots, a_2, a_1)$.

b. Montrer que l'ordre de α est l. Montrer que l'ordre de α^{-1} est l.

c. Montrer que si α est un cycle de longueur impair, alors α^2 est aussi un cycle.

d. Montrer que $\alpha\beta = \beta\alpha$ si α et β sont des cycles à supports disjoints.

e. Soit σ une permutation quelconque dans S_n. Montrer que

$$\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_l)).$$

f. Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que σ se décompose de manière unique en produit de cycles disjoints (à l'ordre des facteurs près). Par exemple, pour la permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ on a $\sigma = (1, 3, 5, 6)(2, 4, 7, 8)$.

g. Le *type cyclique* d'une permutation σ est le partage de n (cliquer pour la définition) donné par les longueurs des cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que deux permutations sont conjugués ssi ils ont le même type cyclique.

h. Montrer que σ et son inverse σ^{-1} sont conjugués.

i. Soit σ une permutation dans S_n, où $n \geq 3$. Montrer que si $\sigma\omega = \omega\sigma$ pour tout $\omega \in S_n$, alors σ est l'élément neutre de S_n.

Exercice 10. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit des permutations suivantes :

a. $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, …, $(1,n)$. (*Indice:* $(a_1,a_2,\ldots,a_p)=(a_1,a_p)(a_1,a_{p-1})\cdots(a_1,a_2)$)

b. $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, …, $(n-1,n)$. (*Indice:* $(3,4)=(1,3)(1,4)(1,3)^{-1}$)

c. $(1,2)$, $(1,2,3,\ldots,n)$.

d. $(1,2)$, $(2,3,\ldots,n)$.

(Autrement dit, les ensembles ci-dessus sont des parties génératrices de S_n.)

Exercice 11. Soit $n\geq 2$. On appelle *signature d'une permutation* $\omega\in S_n$ le nombre

$$\mathsf{sign}(\omega)=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\omega(i)-\omega(j)}{i-j},$$

où le produit porte sur tous les couples (i,j) tels que $i<j$. Par exemple, pour $\omega=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{aligned}\mathsf{sign}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}&=\left(\frac{\omega(1)-\omega(2)}{1-2}\right)\left(\frac{\omega(1)-\omega(3)}{1-3}\right)\left(\frac{\omega(2)-\omega(3)}{2-3}\right)\\&=\left(\frac{2-3}{1-2}\right)\left(\frac{2-1}{1-3}\right)\left(\frac{3-1}{2-3}\right)\\&=1\end{aligned}$$

a. Une *inversion* de $\omega\in S_n$ est un couple (i,j) tel que $1\leq i<j\leq n$ et $\omega(i)>\omega(j)$. Soit $\mathrm{inv}(\omega)$ l'ensemble d'inversions de ω. Montrer que $\mathsf{sign}(\omega)=(-1)^{|\operatorname{inv}(\omega)|}$.

b. Calculer la signature de tous les éléments de S_3.

c. Montrer que toute transposition de S_n est de signature -1.

d. Montrer que sign est un homomorphisme de S_n dans le groupe multiplicatif $\{1,-1\}$. (*Indice: on peut le faire directement ou à l'aide d'une présentation de* S_n)

e. Une *permutation paire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre pair de transpositions ; une *permutation impaire* est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre impair de transpositions. Montrer que $\mathsf{sign}(\sigma)=1$ si σ est paire ; et $\mathsf{sign}(\sigma)=-1$ si σ est impaire.

f. L'ensemble des permutations paires dans S_n forme le *groupe alterné* A_n. Montrer que A_n est un sous-groupe normal de S_n.

g. Montrer que $|A_n|=\frac{n!}{2}$.

h. Montrer que A_n est engendré par tous les cycles de longueur 3 (tout d'abord, remarquer qu'il suffit de montrer que le produit de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3 ; ensuite, montrer que $(a,b)(a,b)=()$; $(a,b)(b,c)=(a,b,c)$; et $(a,b)(c,d)=(a,b,c)(b,c,d)$).