

## Feuille d'Exercices 2

## Algorithme de Todd–Coxeter

**Exercice 1.** Soit  $G$  et  $G'$  les groupes définis par les présentations suivantes :

$$G = \langle x, y \mid x^2, y^3, xyxyxy \rangle \quad \text{et} \quad G' = \langle a, b \mid a^3, b^3, abab \rangle$$

- Utiliser l'algorithme de Todd et Coxeter pour montrer que  $G \cong A_4$ .
- Utiliser l'algorithme de Todd et Coxeter pour montrer que  $G' \cong A_4$ .
- Donner un isomorphisme explicite entre les groupes.

**Exercice 2.** Soit  $G = \langle a, b, c \mid a^3, b^3, c^4, acac^{-1}, aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$ . Montrer que  $G$  est trivial.

(Indice: Considérer  $(aba^{-1})^3 = (bcb^{-1})^3$ .)

**Exercice 3.** Soit  $G = \langle x, y \mid x^3, y^3, x^{-1}y^{-1}xy \rangle$  et  $H = \langle x \rangle$ . Calculer  $[G : H]$ .

**Exercice 4.** Soit  $G = \langle x, y \mid x^2y^2, x^3y^5 \rangle$  et  $H = \{e\}$ , où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ . Calculer  $[G : H]$ .

**Exercice 5.** Calculer l'ordre du groupe défini par la présentation  $\langle a, b \mid a^5, b^3, a^2ba^{-1}b^{-1} \rangle$ .

**Exercice 6.**

- Soit  $G = \langle x, y \mid x^2y^2, y^{-1}xyx^{-3} \rangle$ . Montrer que  $G$  est un groupe d'ordre 8.
- Soit  $G' = \langle a, b \mid a^4, b^2, abab^{-1} \rangle$ . Montrer que  $G'$  est un groupe d'ordre 8.
- Déterminer si  $G$  et  $G'$  sont isomorphes.

**Exercice 7!** Soit  $G = \langle s, t \mid t^{-1}s^3t = s^5 \rangle$ . Montrer que l'élément

$$s^{-1}t^{-1}s^{-1}tst^{-1}st$$

appartient à  $\ker(f)$  pour tout morphisme de groupes  $f : G \rightarrow G'$  dont  $G'$  est un groupe fini.