Feuille d'Exercices 3

Modules

Exercice 1. Soit M un R–module à gauche.

a. Montrer que $0_R \cdot m = 0_M$ pour tout $m \in M$.

b. Montrer que $r \cdot 0_M = 0_M$ pour tout $r \in R$.

c. Montrer que $(-1_R) \cdot m = -m$ pour tout $m \in M$.

Exercice 2. Soit M un R–module à droite. Soit $a \in R$ et $m \in M$ non-nul tels que $m \cdot a = 0_M$. Montrer que a ne possède pas un inverse à droite (il n'existe pas de $b \in R$ tel que $ab = 1_R$).

Exercice 3. Soit R et S deux anneaux et $\phi : S \to R$ un morphisme d'anneaux. Si M est un R–module à gauche, montrer que M est aussi un S–module à gauche si l'on définit

$$s \cdot m = \phi(s) \cdot m \text{ pour tout } s \in S \text{ et pour tout } m \in M.$$

Sous-modules

Exercice 4. ($\mathbb{R}[x]$*–modules.*) Soit $V = \mathbb{R}^2$. Rappler que V devient un $\mathbb{R}[x]$–module si l'on se donne une application linéaire $T : V \to V$: par exemple, l'action du polynôme $3x^2 - 2x + 1$ sur $v \in V$ est

$$(3x^2 - 2x + 1) \cdot \vec{v} = 3\,T(T(\vec{v})) - 2\,T(\vec{v}) + \vec{v}.$$

a. Soit $T_1 : V \to V$ la rotation par $\pi/2$ dans le sens horaire autour de l'origine.
Montrer que V et $\{0\}$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-modules de V.

b. Soit $T_2 : V \to V$ la projection sur la droite $x = 0$.
Montrer que V, $\{0\}$, la droite $x = 0$ et la droite $y = 0$ sont les seuls $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

c. Soit $T_3 : V \to V$ la rotation par π dans le sens horaire autour de l'origine.
Montrer que tout sous-espace de V est $\mathbb{R}[x]$–sous-module de V.

Exercice 5. Soit N, N' deux sous-modules d'un R–module M.

a. Montrer que $N \cap N'$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $N + N' = \{n + n' : n \in N, n' \in N'\}$ est un sous-module de M.

Morphismes de modules

Exercice 6. Soit $f : M \to M'$ un morphisme de R–modules à gauche.

a. Montrer que $\ker(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$ est un sous-module de M.

b. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \{f(m) \mid m \in M\}$ est un sous-module de M'.

c. Soit U' un sous-module de M'. Montrer que $f^{-1}(U')$ est un sous-module de M.

Exercice 7. Soit R un *anneau intègre* (c'est-à-dire, R est commutatif, R est unitaire, et si $a, b \in R$ sont non nuls, alors ab est non nul). Pour un R–module à gauche M, on définit

$$\mathrm{Tor}(M) = \{m \in M \ : \text{ il existe } a \in R \ \underline{\textit{non-nul}} \text{ tel que } a \cdot m = 0\}.$$

a. Montrer que $\mathrm{Tor}(M)$ est un sous-module de M.

b. Soit $\varphi : M \to N$ un morphisme de R–modules. Montrer que $\varphi(\mathrm{Tor}(M)) \subseteq \mathrm{Tor}(N)$.

Exercice 8. Soit R un anneau intègre et I un idéal à gauche principal non nul de R. Montrer que I et R sont isomorphes en tant que R–modules à gauche.

Modules quotients

Exercice 9. Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules à gauche et K un sous-module de M tel que $K \subseteq \ker(f)$. Montrer que la correspondance

$$\begin{aligned} \widehat{f} : M/K &\longrightarrow N \\ m + K &\longmapsto f(m) \end{aligned}$$

est un morphisme de R–modules. *(Il faut aussi montrer que $\widehat{f}$ est bien défini.)*

Exercice 10. Soit N un R–module et M un R–module monogène.

a. Montrer que $M \cong R/I$, où I est un idéal à gauche de R.

b. Montrer que $\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \{n \in N : an = 0 \text{ pour tout } a \in I\}$.

c. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{pgcd}(a, b)\mathbb{Z}$.