Feuille d'Exercices 4

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que si f est un isomorphisme, alors f possède un unique inverse.

b. Montrer que s'il existe des morphismes $Y \xrightarrow{g} X$ et $Y \xrightarrow{h} X$ dans $\mathcal{C}$ tels que $g \circ f = \mathbb{1}_X$ et $f \circ h = \mathbb{1}_Y$, alors f est un isomorphisme.

Exercice 2. Soit M un monoïde et $\mathcal{M}$ la catégorie à un seul objet associé à M. Identifier les isomorphismes dans $\mathcal{M}$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit une nouvelle catégorie $\mathcal{C}^\times$ dont les objets et la composition demeurent ceux de $\mathcal{C}$ mais les morphismes sont les *isomorphismes* de $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^\times) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), \quad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\times}(A, B) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) : f \text{ est un isomorphisme}\}.$$

Vérifier que $\mathcal{C}^\times$ est bien une catégorie. (Une catégorie dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme est appelée un *groupoïde*.)

Exercice 4. Soit $(P, \leq_P)$ un ensemble partiellement ordonné. On définit une catégorie $\mathcal{P}$ comme suit.

— Les objets de la catégorie sont les éléments de P ; c'est-à-dire, $\mathrm{Obj}(\mathcal{P}) = P$.

— Pour chaque paire d'objets $x, y \in \mathrm{Obj}(P)$: si $x \leq_P y$, alors il existe un unique morphisme de x vers y, noté i^x_y ; si $x \not\leq_P y$, alors il n'existe pas de morphisme de x vers y. C'est-à-dire,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x, y) = \begin{cases} \{i^x_y\}, & \text{si } x \leq_P y, \\ \{\}, & \text{si } x \not\leq_P y. \end{cases}$$

— La composition est définie à partir de la transitivité $\leq_P$ dans P :

$$i^y_z \circ i^x_y = i^x_z.$$

a. Vérifier que $\mathcal{P}$ est une catégorie.

b. Soit x un objet de $\mathcal{P}$. Donner une description de la catégorie $\mathcal{P}_x$ en termes de l'ensemble partiellement ordonné $(P, \leq_P)$.

c. *(Exemple explicite)* Soit $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ l'ensemble de diviseurs de 12, et $\leq_P$ la relation définie par $x \leq_P y$ ssi x divise y. Identifier tous les morphismes et isomorphismes de $\mathcal{P}$.