Feuille d'Exercices 5

Monomorphismes et épimorphismes

Exercice 1. Montrer que l'inclusion de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ est un épimorphisme dans la catégorie de monoïdes.

Exercice 2. Montrer que l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ est un épimorphisme dans la catégorie d'anneaux (pas nécessairement unitaires).

Exercice 3. Soit $X \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} Z$ deux morphismes d'une catégorie $\mathcal{C}$. Montrer les énoncés suivants.

a. Si $f \circ g$ est un monomorphisme, alors g est un monomorphisme.
b. Si f et g sont des monomorphismes, alors $f \circ g$ est un monomorphisme.
c. Si $f \circ g$ est un épimorphisme, alors f est un épimorphisme.
d. Si f et g sont des épimorphisme, alors $f \circ g$ est un épimorphisme.
e. Si f est un isomorphe, alors f est un monomorphisme et un épimorphisme.
f. Si deux parmi f, g, $f \circ g$ sont isomorphismes, alors f, g, et $f \circ g$ sont isomorphismes.

Objets terminaux

Exercice 4. Montrer que le groupe trivial est un objet nul de la catégorie des groupes abéliens et de la catégorie de groupes.

Exercice 5. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ est un objet initial dans la catégorie des anneaux unitaires, et que l'anneau nul (l'anneau à un seul élément) est l'objet terminal.

Exercice 6.

a. Montrer que ni **Ens** ni **Top** admet des objet nuls.
b. Posons $\mathbf{Ens}_*$ la catégorie d'ensembles pointés : un ensemble pointé est une paire (X, x), où X est un ensemble et x est un élément de X ; un morphisme de (X, x) à (Y, y) est une application de X dans Y qui envoie x à y. Montrer que $\mathbf{Ens}_*$ admet un objet nul.
c. Montrer que $\mathbf{Top}_*$, la catégorie d'espaces topologiques pointés, admet un objet nul.

Exercice 7. Montrer qu'un objet initial (ou final) est unique à *unique* isomorphisme près.

Exercice 8. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, I un objet initial de $\mathcal{C}$ et F un objet final de $\mathcal{C}$.

a. Montrer que tout morphisme de la forme $A \to I$ admet un inverse à droite.
b. Montrer que tout morphisme de la forme $F \to B$ admet un inverse à gauche.
c. Montrer que s'il existe un morphisme de F vers I dans $\mathcal{C}$, alors F et I sont isomorphes.

Produits et coproduits

Exercice 9. Soit A et B deux groupes abéliens.

a. Montrer que le produit cartesien $A \times B$ est le coproduit de A et B dans la catégorie de groupes abéliens.

b. En utilisant la propriété universelle du coproduit, montrer que $A \times B$ ***n'est pas*** le coproduit de A et B dans la catégorie de groupes.

(*Indice: Considérer les groupes cycliques* C_2 *et* C_3 *et des morphismes* $C_2 \to S_3$ *et* $C_3 \to S_3$.)

Exercice 10. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède un objet final F et qui admet produits.

a. Montrer que $F \sqcap A \cong A \cong A \sqcap F$.

b. Montrer que $(A \sqcap B) \sqcap C \cong A \sqcap (B \sqcap C)$ pour tous $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Produits fibrés / Sommes amalgamées

Exercice 11. Soit B et C deux sous-ensemble d'un ensemble A.

a. Montrer que le produit fibré dans **Ens** de $B \xrightarrow{\mathrm{incl}_B} A$ et $C \xrightarrow{\mathrm{incl}_C} A$ est $B \cap C$.

b. Montrer que la somme amalgamée dans **Ens** de $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} B$ et $B \cap C \xrightarrow{\mathrm{incl}} C$ est $B \cup C$.