Feuille d'Exercices 6

Morphismes, monomorphismes, épimorphismes, inverses unilatéraux

Exercice 1. Montrer que l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est un épimorphisme et un monomorphisme dans la catégorie d'anneaux **Ann** (pas nécessairement unitaire). *Remarquer qu'un morphisme qui est un épimorphisme et un monomorphisme n'est pas forcément un isomorphisme.*

Exercice 2.

a. Montrer que tout monomorphisme qui admet un inverse à droite est un isomorphisme.

b. Montrer que tout épimorphisme qui admet un inverse à gauche est un isomorphisme.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

a. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme ssi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

est injective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

b. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme ssi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ h & \mapsto & h \circ f \end{array}$$

est injective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.

a. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ admet un inverse à droite ssi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

est surjective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

b. Montrer qu'un morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ admet un inverse à gauche ssi l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ h & \mapsto & h \circ f \end{array}$$

est surjective pour tout $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Objets terminaux

Exercice 5. Soit F un objet final dans la catégorie **Ens**.

a. Montrer qu'il y a une bijection entre A et les morphismes de la forme $F \to A$.

b. Si $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme dans **Ens**, montrer qu'il y a une bijection entre $\mathrm{im}(f)$ et les morphismes de la forme $F \to A \xrightarrow{f} B$.

Produits fibrés / Sommes amalgamées

Exercice 6. Soit A, B, C des groupes abéliens. Montrer que dans la catégorie des groupes abéliens :

a. le produit fibré de $B \xrightarrow{f} A$ et $C \xrightarrow{g} A$ est

$$D = \{(b, c) \in B \oplus C : f(b) = g(c)\}\,;$$

b. la somme amalgamée de $A \xrightarrow{g} C$ et $A \xrightarrow{f} B$ est

$$D = (B \oplus C)/N,$$

où $N = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$.

(*Indice: Il faut définir les morphismes α et β associés à D.*)

Exercice 7. Soit $A \xrightarrow{f} B$ un morphisme dans une catégorie $\mathcal{C}$.

a. Montrer que f est un monomorphisme ssi le produit fibré de f et f est A.

b. Montrer que f est un épimorphisme ssi la somme amalgamée de f et f est B.

Foncteurs

Exercice 8. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur et $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$.

a. Montrer que si f est un isomorphisme, alors $F(f)$ est un isomorphisme.

b. Donner un exemple d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et un morphisme f dans $\mathcal{C}$ tels que : $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$; mais f n'est pas un isomorphisme dans $\mathcal{C}$.

Transformations naturelles

Exercice 9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Montrer que si A et B sont isomorphe, alors il existe un isomorphisme naturel entre les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -)$.