Feuille d'Exercices 7

Foncteurs fidèles et essentiellement surjectifs

Exercice 1. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur et $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. Montrer que :

a. si F est fidèle et si $F(f)$ est un monomorphisme, alors f est un monomorphisme ;

b. si F est fidèle et si $F(f)$ est un épimorphisme, alors f est un épimorphisme.

Exercice 2. Montrer que l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens **Ab** dans la catégorie des groupes **Grp** est pleinement fidèle, mais pas essentiellement surjectif.

Exercice 3. Montrer que le foncteur oubli $U : \mathbf{Ann}_1 \to \mathbf{Ab}$ est fidèle, n'est pas plein et n'est pas essentiellement surjectif.

Sur les R-modules

Exercice 4. Montrer que tout R-module est isomorphe à un quotient d'un R-module libre.

Exercice 5. Soit N un sous-module d'un R–module M. Montrer que si M/N et N sont de type fini, alors M est de type fini.

Exercice 6. Soit M un groupe abélien qui est à la fois un R-module à gauche et un R-module à droite tel que $rm = mr$ pour tout $r \in R$ et $m \in M$. Montrer que $(r_1r_2)m = m(r_2r_1)$ pour tout $m \in M$ et tous $r_1, r_2 \in R$.

Exercice 7. Soit R et S deux anneaux. Écrivons : A_S si A est un S-module à droite ; ${}_RA$ si A est un R-module à gauche ; ${}_RA_S$ si A est un (R,S)-bimodule. Montrer les énoncés suviants.

a. $\operatorname{Hom}_R({}_RA_S, {}_RB)$ est un *S-module à gauche* où $(s \cdot f)(a) = f(as)$.

b. $\operatorname{Hom}_R(A_R, {}_SB_R)$ est un *S-module à gauche* où $(s \cdot f)(a) = s \cdot (f(a))$.

c. $\operatorname{Hom}_S({}_RA_S, B_S)$ est un *R-module à droite* où $(f \cdot r)(a) = f(ra)$.

d. $\operatorname{Hom}_S({}_SA, {}_SB_R)$ est un *R-module à droite* où $(f \cdot r)(a) = (f(a)) \cdot r$.

Propriétés universelles

Exercice 8. (*Propriété universelle de* $\ker(f)$) Soit $f : M \to N$ un morphisme de R–modules. On montrera que le noyau K de f est uniquement déterminé par la propriété suivante :

(i) il existe un morphisme de R–modules $\ell : K \to M$ tel que $f \circ \ell = 0$; et

(ii) si $\ell' : K' \to M$ est un morphisme de R–modules tel que $f \circ \ell' = 0$, alors il existe un unique morphisme de R–modules $u : K' \to K$ tel que $\ell' = \ell \circ u$.

Explicitement :

a. Montrer que le noyau de f vérifie les conditions (i) et (ii).

b. Montrer que si K est un R–module qui vérifie (i) et (ii), alors $K \cong \ker(f)$.

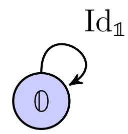
Exercice 9. Montrer que l'objet libre sur un ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dans la catégorie des anneaux unitaires commutatifs est l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Équivalences de catégories

Exercice 10.

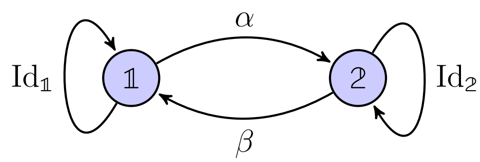
Soit $\mathcal{P}$ la catégorie dont :

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathcal{P}) &= \{\mathbb{0}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(\mathbb{0},\mathbb{0}) &= \{\mathrm{Id}_{\mathbb{0}}\} \end{aligned}$$



Soit $\mathcal{A}$ la catégorie dont :

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) &= \{\mathbb{1},\mathbb{2}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{1},\mathbb{1}) &= \{\mathrm{Id}_{\mathbb{1}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{2},\mathbb{2}) &= \{\mathrm{Id}_{\mathbb{2}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{1},\mathbb{2}) &= \{\alpha\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{2},\mathbb{1}) &= \{\beta\} \end{aligned}$$



Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) &= \{\mathbb{3},\mathbb{4}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{3},\mathbb{3}) &= \{\mathrm{Id}_{\mathbb{1}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{4},\mathbb{4}) &= \{\mathrm{Id}_{\mathbb{2}}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{3},\mathbb{4}) &= \{\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{4},\mathbb{3}) &= \{\} \end{aligned}$$

a. Montrer que les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}$ sont équivalentes.

b. Montrer que les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas équivalentes.