Feuille d'Exercices 8

Modules de type fini

Exercice 1. Soit R un anneau.

a. Montrer que tout R-module est isomorphe à un quotient d'un R-module libre.

b. Montrer que tout R-module de type fini est isomorphe à un quotient d'un R-module libre de rang fini.

Exercice 2. Soit N un sous-module d'un R–module M. Montrer que si M/N et N sont de type fini, alors M est de type fini.

Somme directe de R-modules

Exercice 3. Soit $p : M \to M$ un endomorphisme de R-modules tel que $p \circ p = p$. Montrer que

$$M \cong \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p).$$

Modules simples

Exercice 4. Soit $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ un morphisme de R-modules non nul.

a. Montrer que si M est simple, alors f est injectif. (indice: $\ker(f)$ *est un sous-module*)

b. Montrer que si N est simple, alors f est surjectif. (indice: $\operatorname{im}(f)$ *est un sous-module*)

c. Montrer que si M et N sont simples, alors f est un isomorphisme de R-modules.

Exercice 5. Soit M un R-module à gauche. Montrer que M est simple ssi *pour tout* $m \in M$ non nul, on a que $M = \langle m \rangle$. (rappel: $\langle m \rangle = \{r \cdot m : r \in R\}$)

Exercice 6. Soit M un R-module à gauche. Montrer que M est simple ssi il existe un idéal à gauche maximal I de R tel que $M \cong R/I$. (indice: *considérer un morphisme* $R \to M$)

Modules noethériens et artiniens

Exercice 7. Montrer que tout sous-module et tout module quotient d'un module noethérien (resp. artinien) est noethérien (resp. artinien).

Exercice 8. Soit $\varphi : R \to S$ un morphisme d'anneaux et M un S-module.
Rappeler que M est également un R-module, où $r \cdot m = \varphi(r)m$ pour tous $r \in R$, $m \in m$.

Montrer que si M est artinien (resp. noethérien) en tant que R-module,
alors il est artinien (resp. noethérien) en tant que S-module.

Exercice 9. Soit R un anneau, I un idéal bilatère de R, et M un R-module.
Rappeler que M/IM est un R/I-module ainsi qu'un R-module.

Montrer que si M/IM est noethérien (resp. artinien) en tant que R/I-module,
alors il est noethérien (resp. artinien) en tant que R-module.

Équivalences de catégories

Exercice 10. Appelons *groupe de permutations* tout sous-groupe d'un groupe symétrique. Déterminer si le foncteur d'inclusion de la catégorie dont les objets sont les groupes de permutations dans la catégorie des groupes finis est une équivalence de catégories.