Feuille d'Exercices 9

Modules indécomposables

Exercice 1. Soit e et f deux idempotents de R. Montrer que e et f sont conjugués ssi $Re \cong Rf$ et $R(1-e) \cong R(1-f)$.

(rappel: *x et y sont conjugués s'il existe un élément inversible $a \in R$ tel que $x = aya^{-1}$.*)

Exercice 2. Soit R un anneau intègre. Montrer que ${}_RR$ est indécomposable.

Anneaux locaux

Exercice 3. Soit R un anneau non nul. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a. R est un anneau local.
b. R possède un unique idéal à gauche maximal.
c. R possède un unique idéal à droite maximal.
d. L'ensemble des éléments non inversibles de R est un idéal bilatère maximal de R.
e. Pour chaque $x \in R$, au moins un des éléments x ou $1-x$ est inversible.
f. Si $x_1, \ldots, x_n \in R$ sont tels que $x_1 + \cdots + x_n$ est inversible, alors il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que x_i est inversible.

Exercice 4. Soit l'anneau

$$\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \text{ avec } m \text{ impair} \right\}.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_{(2)}$ est un anneau local.

Exercice 5. Soit R un anneau et I un idéal bilatère de R tel que l'anneau quotient R/I soit local. Montrer que R est local.

Exercice 6. Soit R un anneau et soit J l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de R. Montrer que R est local ssi J est un idéal maximal de R.

Suites de compositions

Exercice 7. Soit n un entier positif.

a. Trouver la longueur d'une suite de composition du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b. Caractériser les n pour lesquels $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet une suite de composition unique.

Exercice 8. On dit qu'un R-module M est de *longueur finie* si M admet une suite de composition, et on note par $\ell(M)$ la longueur d'une suite de composition de M.

a. Soit M et M' des R-modules de longueur finie. Montrer que si $\varphi : M \to M'$ est un R-morphisme, alors
$$\ell(\mathrm{im}(\varphi)) + \ell(\ker(\varphi)) = \ell(M).$$

b. Soit M un R-module de longueur finie et M_1 et M_2 des sous-modules de M. Montrer que
$$\ell(M_1 + M_2) + \ell(M_1 \cap M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2).$$

Exercice 9. Soit $\ell : R\text{-Mod} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une application définie sur les R-modules vérifiant les propriétés suivantes pour tout R-module M :

(i) Si $M = \{0\}$ est le R-module trivial, alors $\ell(M) = 0$.

(ii) M est simple ssi $\ell(M) = 1$.

(iii) Si N est un sous-module propre de M et $\ell(M) < \infty$, alors $\ell(N) < \ell(M)$.

(iv) Si $N \leq M$, alors $\ell(M) < \infty$ ssi $\ell(N) < \infty$, $\ell(M/N) < \infty$; et dans ce cas,
$$\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N).$$

Montrer que $\ell(M) < \infty$ ssi M admet une suite de composition de longueur $\ell(M)$.

Exercice 10. Soit M un R-module qui admet une suite de composition. Montrer que si A, B et C sont des sous-modules de M, alors
$$(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C) \quad \text{et} \quad (A \cap B) + C = (A + C) \cap (B + C)$$
ssi M ne possède pas un quotient d'un sous-module qui est isomorphe à la somme directe de deux modules simples.