Devoir 1

À remettre le *16 février 2011* ; aucun retard ne sera toléré.

Exercice 1. Le *nombre de Stirling de deuxième espèce* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ comptent le nombre de façons de partager un ensemble de n éléments en k sous-ensemble non-vides. Par exemple, il existe 7 partitions de $\{1,2,3,4\}$ en deux sous-ensembles non-vides :

$$\{1,2,3\} \cup \{4\} \qquad \{1,2,4\} \cup \{3\} \qquad \{1,3,4\} \cup \{2\} \qquad \{2,3,4\} \cup \{1\}$$
$$\{1,2\} \cup \{3,4\} \qquad \{1,3\} \cup \{2,4\} \qquad \{1,4\} \cup \{2,3\}$$

Donc $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$. On définit $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ et $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ pour tout $n > 0$, et $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ si $n < 0$.

a. Montrer que ces nombres satisfont la relation de récurrence : pour tout $n > 0$ entier,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

b. Resoudre la récurrence ci-dessus (pour k fixé) afin de montrer la formule explicite :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}$$

(*éviter la formule de Taylor ; décomposer en fractions partielles*)

Exercice 2. Noter par d_n le nombre des bijections $\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ tel que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. (Une telle bijection est appelée *dérangement*.)

a. Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

b. La *fonction génératrice exponentielle* d'une suite $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ est la série formelle :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

Trouver la fonction génératrice *exponentielle* des nombres d_n :

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$$

Rappler : $e^x = \sum_n \frac{1}{n!} x^n$ *; donc,* e^x *est la fonction génératrice exponentielle de* $1, 1, 1, \ldots$.

c. Montrer l'identité

$$\frac{d_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Exercice 3. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients complexe. Pour chaque ligne i on définit le i-ième *disque de Geršgorin* de A par :

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}$$

(Remarquer que D_i est un disque dans le plan complexe centré à a_{ii} est de rayon $\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$.)

a. Montrer le *Théorème de Geršgorin* : toute valeur propre de A appartient à (au moins) un des disques de Geršgorin de A.

b. Soient $d_1, d_2, \cdots, d_n$ des nombres réels positifs. Montrer que les valeurs propres de A appartient à l'ensemble

$$\bigcup_{1\leq i\leq n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j\neq i} d_j |a_{ij}| \right\}$$

(*Piste : appliquer le théorème de Geršgorin à $D^{-1}AD$ où D est une matrice diagonale.*)

c. Utiliser le théorème de Geršgorin pour estimer les valeurs propres et le rayon spectral de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ensuite, calculer les valeurs propres et le rayon de A et comparer avec vos estimations.