Feuille d'Exercice 2 et Devoir 2

Exercice 1. Soit U la distribution uniforme sur $\mathfrak{S}_n$ (défini par $U(\sigma) = \frac{1}{n!}$ pour tous σ de $\mathfrak{S}_n$).

a. Soit Q la distribution sur $\mathfrak{S}_n$ défini par

$$Q(\sigma) = \begin{cases} \quad 0 \quad , & \text{si } \sigma(n) \neq n, \\ \dfrac{1}{(n-1)!}, & \text{si } \sigma(n) = n. \end{cases}$$

Calculer $\|Q - U\|$, où $U(\sigma) = \frac{1}{n!}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(*Interprétation. Q est la distribution que l'on obtient en faisant ce qui suit : on mélange le jeu de cartes si bien que la distribution est exactement uniforme, et puis on regarde la carte en bas du jeu.*)

b. Supposons que Q est défini par : ≪la n-ième carte se trouve dans une ensemble fixe de positions, et toutes les autres sont distribuer aléatoirement≫. Calculer $\|Q - U\|$.

Exercice 2. Soit Q une distribution sur un groupe fini G, et soit U la distribution uniforme sur G.

a. Montrer que $Q * U = U = U * Q$. En deduire que $Q^n - U = (Q - U)^n$.

b. Montrer que si $Q*Q = Q$, alors il existe un sous-groupe H de G tel que Q est la distribution uniforme sur H.

c. Soit $\overline{Q}$ la distribution défini par $\overline{Q}(g) = Q(g^{-1})$ pour tous g de G. Montrer que $Q * \overline{Q} = U$ si et seulement si $Q = U$.

Exercice 3. Soit G un groupe fini. Rappeler qu'une *représentation (matricielle)* de G sur $\mathbb{C}$ est un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, où $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. (C'est-à-dire, $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$ pour tout $g, h \in G$).

Soit Q une distribution sur G. La *transformée de Fourier* de Q à la représentation ρ de G est la matrice

$$\widehat{Q}(\rho) = \sum_{g \in G} Q(g)\rho(g)$$

a. Soit ρ une représentation quelconque de G et soient P et Q deux distributions sur G. Montrer que $\widehat{P * Q}(\rho) = \widehat{P}(\rho)\widehat{Q}(\rho)$. C'est-à-dire, la transformée d'une convolution de deux distributions est le produit matriciel des transformées des distributions.

b. Soit U la distribution uniforme U sur G (elle est défini par $U(g) = \frac{1}{|G|}$). Montrer que $\widehat{U}(\rho) = 1$ si ρ est la représentation triviale de G, et que $\widehat{U}(\chi) = 0$ si χ est une représentation irréductible non-triviale.

c. Soit $0 \leq p \leq 1$ et soit Q la distribution de probabilité sur $\mathfrak{S}_3$ défini par

$$Q(\sigma) = \begin{cases} p \ , & \text{si } \sigma = [123] \\ \frac{1-p}{3}, & \text{si } \sigma \in \{[213], [321], [132]\} \\ 0 \ , & \text{si } \sigma \in \{[231], [312]\} \end{cases}$$

Calculer $\widehat{Q}(\chi)$ pour chaque représentation irréductible χ de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 4. Soit b un entier positif. Un *b-mélange au sens inverse* est le mélange des cartes où :

– on attache de manière aléatoire et indépendante une étiquette $0, 1, \ldots, b-1$ à chaque carte ;

– on place toutes les cartes étiquetés 0 au début du jeu, en gardant l'ordre relatif de ces cartes ;

– on place les cartes étiquetés 1 après celles étiquetés 0, en gardant l'ordre relatif de ces cartes ;

– *etc.*

Par exemple :

le jeu :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
une étiquetage du jeu :	(2)	(0)	(0)	(2)	(0)	(1)	(2)	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)
jeu après les déplacements :	2	3	5	6	8	12	1	4	7	9	10	11

Un *b-mélange* est le mélange où on coupe le jeu de cartes en b paquets et puis on entrelace les paquets (toutes les façon possibles de couper le jeu en b paquets et de les enterlacer sont également probable, et des paquets vides sont permis).

a. Soient a et b deux entiers positifs. Montrer qu'un a-mélange au sens inverse suivi par un b-mélange au sens inverse est un ab-mélange au sens inverse.

b. Montrer que la distribution Q_b du b-mélange d'un jeu de n cartes vérfie pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$Q_b(\sigma) = \frac{1}{b^n}\binom{n+b-r}{n}$$

où r est le nombre de *sous-séquences croissantes* de σ (de façon équivalente, $r-1$ est le nombre de descentes de σ^{-1}).

c. En deduire que les idempotents Eulériens $e_n^{(1)}$, $e_n^{(2)}$, …, $e_n^{(n)}$ sont biens idempotents orthogonaux et que leur somme est l'identité de l'algèbre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. *Rappeler que nous avons défini ces éléments par la fonction génératrice :*

$$\sum_{j=1}^{n} e_n^{(j)}\, t^j = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (t-\mathrm{des}(\sigma))^{\uparrow n}\,\sigma$$

Devoir 2

À remettre le *30 mars 2011* :

– une solution complète d'exercice *3c*

– une démonstration bien-écrite et complète pour exercice *4*

Sera pris en compte dans l'évaluation :

– exactitude des calculs

– exactitude du raisonnement amenant à la solution

– qualité de la rédaction : qualité du français écrit ; clarté de la rédaction ; bon usage du langage et des symboles mathématiques ; la facilité de suivre le texte.

CHAQUE JOUR DE RETARD ENTRAÎNE UNE PÉNALITÉ DE 10%.