Devoir 1

à remettre le 3 mars 2014

Exercice 1. Soient L un treillis fini et $\mathbb{K}$ un corps. *L'algèbre de Möbius* de L, notée $\text{Möb}_{\mathbb{K}}(L)$, est l'algèbre de monoïde de $(L, \vee)$ sur $\mathbb{K}$. (Autrement dit, $\text{Möb}_{\mathbb{K}}(L)$ est le $\mathbb{K}$–espace vectoriel à base L et avec produit obtenu par extension bilinéaire de l'opération $\vee$.)

Pour $X \in L$, on pose

$$\varsigma_X = \sum_{Y \geq X} \mu(X, Y)\, Y \in \text{Möb}_{\mathbb{K}}(L),$$

où μ est la fonction de Möbius de L.

a. Montrer que $X = \sum_{Y \geq X} \varsigma_Y$ pour tout $X \in L$.

b. Montrer que $\{\varsigma_X : X \in L\}$ est une base de $\text{Möb}_{\mathbb{K}}(L)$ en tant que $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

c. Soient $X, Y \in L$. Montrer que

- (i) $\varsigma_X \varsigma_X = \varsigma_X$;
- (ii) $\varsigma_X \varsigma_Y = 0$ si $X \neq Y$;
- (iii) $\sum_{X \in L} \varsigma_X = \widehat{0}$ (l'unité de l'algèbre).
- (iv) $\text{Möb}_{\mathbb{K}}(L)\varsigma_X$ est un $\text{Möb}_{\mathbb{K}}(L)$–module indécomposable.

d. Montrer que $\text{Möb}_{\mathbb{K}}(L) = \bigoplus_{X \in L} \text{span}_{\mathbb{K}}\{\varsigma_X\}$ (somme directe d'algèbres).

Exercice 2. Soient $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans dans V et $\mathcal{L}$ son treillis d'intersection. Pour $X \in \mathcal{L}$ on définit $\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} : X \subseteq H\}$.

a. Montrer que $X \leq Y$ dans $\mathcal{L}$ ssi $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}_Y$.

b. Montrer que le treillis d'intersection de l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}_X$ est isomorphe à l'intervalle $[V, X]$ du treillis $\mathcal{L}$.

c. En déduire que $\mu_X(U, U') = \mu(U, U')$, où μ_X et μ sont les fonctions de Möbius de $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}$, respectivement.

Exercice 3. Soit $\text{Comp}_{[n]}$ le monoïde de compositions de $[n]$.

a. Montrer que

$$M = \left\{[B_1, B_2, \ldots, B_l] \in \text{Comp}_{[n]} : |B_i| \leq 2 \text{ pour tout } i \in [l]\right\}$$

est un sous-semigroupe de $\text{Comp}_{[n]}$ qui est stable pour l'action de S_n.

b. Calculer le nombre d'orbites pour l'action de S_n sur M.

Exercice 4. Soit $\mathrm{Comp}_{[n]}$ le monoïde de compositions de $[n]$.

a. Montrer que

$$M = \big\{[B_1, B_2, \dots, B_l] \in \mathrm{Comp}_{[n]} : |B_1| = |B_2| = \cdots = |B_{l-1}| = 1\big\}$$

est un sous-monoïde de $\mathrm{Comp}_{[n]}$ qui est stable pour l'action de S_n.

b. Calculer le nombre d'orbites pour l'action de S_n sur M.

c. Soit $\mathbb{Q}M$ l'algèbre de monoïde de M. Montrer que les éléments de $\mathbb{Q}M$ invariants pour l'action de S_n forment une sous-algèbre commutative de $\mathbb{Q}M$.

Exercice 5. *(Voir la Feuille d'Exercise 3 pour plus d'informations.)* Soient $G = (V, E)$ un graphe fini simple à sommets $V = \{1, 2, \dots, n\}$ et M_G un monoïde engendré par des éléments $g_1, g_2, \dots, g_n$ tels que $g_i g_j = g_j g_i$ si $\{i, j\} \in E$. On définit un ordre sur les éléments de M_G :

$$s \leq t \text{ s'il existe un élément } u \in M_G \text{ tel que } su = t.$$

Soit $N_G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ le nombre d'éléments de M_G possédant exactement a_i copies de g_i ; la fonction génératice de $N_G(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ vérifie

$$\sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \cdots \sum_{a_n \geq 0} N_G(a_1, a_2, \dots, a_n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \frac{1}{\sum (-1)^r x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}},$$

où la somme à droite porte sur $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ tel que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ et $g_{i_a} g_{i_b} = g_{i_b} g_{i_a}$ pour tout $a, b \in [r]$.

a. Soit G le graphe vide à n sommets (i.e., G ne possède pas d'arêtes). Montrer que

$$\sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \cdots \sum_{a_n \geq 0} \binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1, a_2, \dots, a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \frac{1}{1 - (x_1 + \cdots + x_n)}.$$

b. Soit G le graphe complet à n sommets. Montrer que

$$\sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \cdots \sum_{a_n \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)}.$$

c. Soient G un cycle à $n \geq 4$ sommets. Montrer que

$$\sum_{a_i \in \{0,1\}} N_G(a_1, a_2, \dots, a_n) = n! + 1.$$