Devoir 2

à remettre le 9 avril 2014

Exercice 1. Soit d_n le nombre des bijections $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Une telle bijection est appelée *dérangement*.)

a. Montrer que

$$
\begin{aligned}
n! &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d_{n-j} && \text{pour tout } n \geq 0 \\
d_n &= (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) && \text{pour tout } n \geq 2 \\
d_n &= n d_{n-1} + (-1)^n && \text{pour tout } n \geq 1
\end{aligned}
$$

b. La *fonction génératrice exponentielle* d'une suite $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ est la série formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Par exemple, e^x est la fonction génératrice exponentielle de $1, 1, 1, \ldots$, car $e^x = \sum_n \frac{1}{n!} x^n$.

Montrer que la fonction génératrice exponentielle des nombres d_n est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

c. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{d_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice irréductible telle que $A \geq 0$. Montrer que $(I_n + A)^{n-1} > 0$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{F}$ le monoïde de compositions de $\{1,2,3\}$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble des compositions en singletons. On définit une mesure de probabilité $\{p_x\}_{x\in\mathcal{F}}$ par

$$p_{[\{1\},\{2,3\}]} = \frac{2}{5}, \qquad p_{[\{2,3\},\{1\}]} = \frac{1}{10}, \qquad p_{[\{2\},\{1,3\}]} = \frac{3}{10}, \qquad p_{[\{1,3\},\{2\}]} = \frac{1}{5},$$

$$\text{et } p_x = 0 \text{ sinon.}$$

a. Calculer la matrice de transition de la chaîne de Markov sur $\mathcal{C}$ induite par $\{p_x\}_{x\in\mathcal{F}}$.

b. Calculer directement (par exemple, avec Sage ou Maple) et à l'aide du théorème de BHR les valeurs propres (et les multiplicités) de la matrice de transition.

c. Calculer la loi stationnaire de la chaîne de Markov.

d. Soient $\mathbb{R}\mathcal{F}$ l'algèbre de monoïde de $\mathcal{F}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et

$$\rho = \sum_{x\in\mathcal{F}} p_x\, x \in \mathbb{R}\mathcal{F}.$$

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathcal{C} &\to \mathbb{R}\mathcal{C} \\ a &\mapsto \rho a \end{aligned}$$

est une transformation linéaire et calculer explicitement la matrice de la transformation.

e. Calculer des idempotents orthogonaux $\{e_X\}_{X\in\mathcal{L}} \subseteq \mathbb{R}\mathcal{F}$ tels que

$$\rho = \sum_{X\in\mathcal{L}} \lambda_X e_X.$$

f. Trouver une base de $\mathbb{R}\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice de transition est diagonale.

Exercice 4. Soit $\{p_X\}_{X\in\mathrm{Comp}_{[n]}}$ une mesure de probabilité qui est invariante pour l'action de S_n : c'est-à-dire, pour tout $X \in \mathrm{Comp}_{[n]}$ et pour tout $\sigma \in S_n$, on a que $p_{\sigma\cdot X} = p_X$. Soit T la matrice de transition de la chaine de Markov induite par la mesure $\{p_X\}_{X\in\mathrm{Comp}_{[n]}}$.

a. Montrer que les espaces propres de T sont des S_n–modules. Préciser l'action de S_n.

b. Calculer le caractère du noyau de la matrice de transition de la chaine de Markov induite par la mesure suivante sur $\mathrm{Comp}_{[4]}$.

$$p_X = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } X = [X_1, X_2] \text{ avec } |X_1| = |X_2| = 2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$