Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit P le *poset de divisibilité* (P est l'ensemble d'entiers strictement positif muni de la relation de divisibilité).

a. Montrer que

$$\mu(a,b) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{si } \frac{b}{a} \text{ est un produit de } k \text{ nombres premiers distincts,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

b. Soit $\phi(n) = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ et } \operatorname{pgcd}(n,k) = 1\}$. Montrer que

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

c. Montrer que

$$\frac{\phi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

où $\mu(d) = \mu(1,d)$.

Exercice 2. Soient q une pussiance d'un nombre premier et N_d le nombre de polynôme unitaire irréductible de degree d à coefficient dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.

a. Montrer que

$$q^n = \sum_{d|n} dN_d$$

b. En déduire que

$$N_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d.$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{A}$ un arrangement dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$r(\mathcal{A}) = 1 - p_0 + p_1 + p_{0,1}$$

où :
- p_0 est le nombre de points d'intersection ;
- p_1 est la cardinalité de $\mathcal{A}$ (nombre de droites) ; et
- $p_{0,1}$ est le nombre de paires (H,x), où $H \in \mathcal{A}$ et x est un des points d'intersection de H.

En outre, si les droites de $\mathcal{A}$ ne soient pas toutes parallèles, montrer que

$$b(\mathcal{A}) = 1 - p_0 - p_1 + p_{0,1}.$$

Exercice 4.

a. Soient H un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ et X un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ tels que $H \cap X \neq \emptyset$. Montrer que soit $H \cap X = X$ ou $\dim(X) - \dim(H \cap X) = 1$.

b. Soient $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ et H_0 un élément de $\mathcal{A}$. En déduire que

$$\mathcal{A}'' = \{H_0 \cap H : H \in \mathcal{A} \setminus \{H_0\} \text{ et } H \cap H_0 \neq \emptyset\}$$

est un arrangement d'hyperplan dans H_0.

Exercice 5. Soit $\mathcal{A}$ l'arrangement de Boole dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que le treilli d'intersection de $\mathcal{A}$ est isomorphe au poset des parties de $[n]$.

b. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-1)^n$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{A}$ l'arrangement d'hyperplans constituées des hyperplans

$$H_1 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : v_1 = v_2\}, H_2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : v_2 = v_3\}, \ldots, H_n = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : v_n = v_1\}.$$

Calculer le polynôme caractéristique $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ et le nombre de régions $r(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$.

Exercice 7. Soit G un graph à sommets $[n]$ tel que G contient k sommets qui sont deux-à-deux adjacents ($k \leq n$). Montrer que $k!$ divise $r(\mathcal{A}_G)$.

Exercice 8. (*Théorème de Philip Hall.*) Soit P un poset fini. On note par $\widehat{P}$ le poset obtenu à partir de P en adjoignant un élément minimal $\widehat{0}$ et un élément maximal $\widehat{1}$. Soit c_i le nombre de chaînes $\widehat{0} = t_0 < \cdots < t_i = \widehat{1}$ de longueur i entre $\widehat{0}$ et $\widehat{1}$. Montrer que

$$\mu_{\widehat{P}}\left(\widehat{0}, \widehat{1}\right) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \cdots,$$

où $\mu_{\widehat{P}}$ est la fonction de Möbius du poset $\widehat{P}$.

Exercice 9. Soit P un poset avec un élément minimal $\widehat{0}$ et un élément maximal $\widehat{1}$. Montrer que

$$\sum_{s \leq t} \mu(s,t) = 1.$$