Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soit σ une permutation dans S_n. Pour tout $i \in [n]$, on définit $I_i(\sigma)$ comme le nombre de $j \in [n]$ tel que j se trouve à gauche de i dans σ et $j > i$:

$$I_i(\sigma) = \Big| \left\{ j \in [n] : \sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i) \text{ et } j > i \right\} \Big|.$$

Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} S_n & \xrightarrow{I} & \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : 0 \leq a_i \leq n - i\} \\ \sigma & \longmapsto & I(\sigma) = (I_1(\sigma), I_2(\sigma), \ldots, I_n(\sigma)) \end{array}$$

est une bijection.

Par exemple, si $\sigma = 417396285$, alors

$$I_1(\sigma) = |\,\{4\}\,| = 1, \quad I_2(\sigma) = |\,\{4, 7, 3, 9, 6\}\,| = 5, \quad I_3(\sigma) = |\,\{4, 7\}\,| = 2, \quad \ldots$$

et $I(417396285) = (1, 5, 2, 0, 4, 2, 0, 1, 0)$.

Exercice 2. Une *descente* d'une permutation $\sigma \in S_n$ est un élément $i \in [n-1]$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Soit

$$\operatorname{des}(\sigma) = \{i \in [n-1] : \sigma(i) > \sigma(i+1)\}.$$

a. Montrer que le nombre de permutations $\sigma \in S_n$ tel que $\operatorname{des}(\sigma) \subseteq T$ est

$$\binom{n}{t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots, n - t_k}$$

où $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq n-1$ sont les éléments de T.

b. Montrer que le nombre de permutations $\sigma \in S_n$ tel que $\operatorname{des}(\sigma) = T$ est

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq k} (-1)^{k-j} \binom{n}{t_{i_1}, t_{i_2} - t_{i_1}, t_{i_3} - t_{i_2}, \ldots, n - t_{i_k}}.$$

c. Montrer que le nombre de permutations $\sigma \in S_n$ tel que $\operatorname{des}(\sigma) = T$ est le déterminant de la matrice

$$\left[\binom{n - t_i}{t_{j+1} - t_i} \right]_{0 \leq i, j \leq k}$$

Exercice 3. Montrer que le énoncés suivants sont équivalent.

a. $f : [n] \to [n]$ est une fonction de stationnement.

b. $|f^{-1}([j])| \geq j$ pour tout $j \in [n]$.

c. $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$ possède i termes plus grand ou ègal à $n - i$, pour tout i.

d. Si $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est le réarrangement de $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$ tel que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, alors $b_i \leq i$ pour tout $i \in [n]$.

e. $(f(1) - 1, f(2) - 1, \ldots, f(n) - 1)$ est une permutation de $I(\sigma)$ pour une certain $\sigma \in S_n$.

Exercice 4. Dessiner l'essentialisation de l'arrangement Shi_3 et étiqueter les régions selon l'étiquetage de Pak et Stanley.

Exercice 5. Dessiner l'essentialisation de l'arrangement Shi_3 et étiqueter les régions selon l'étiquetage de Athanasiadis et Linusson.

Exercice 6. Vérifier que les deux applications de Athanasiadis et Linusson définies en classe sont des bijections réciproques.

Exercice 7. Dessiner l'essentialisation de l'arrangement Shi_3 et étiqueter les régions selon la version suivante de l'étiquetage de Athanasiadis et Linusson : on ajoute un arc entre i et j ssi $x_i - x_j < 1$ (au lieu de $x_i - x_j > 1$).

Exercice 8. Une fonction de stationnement $f : [n] \to [n]$ est dite *premier* si pour tout $1 \leq j \leq n - 1$, la cardinalité de $f^{-1}([j])$ est au moins $j + 1$. Montrer que le nombre de fonctions de stationnement premier $f : [n] \to [n]$ est $(n - 1)^{n-1}$.

Exercice 9. Soient $G = \mathbb{Z}/(n + 1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(n + 1)\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n + 1)\mathbb{Z}$ (n copies) et H le sous-groupe de G engendré par $(1, 1, \ldots, 1)$.

a. En identifiant une fonction de stationnement $f : [n] \to [n]$ de longueur n avec l'élément $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$ de G, montrer que toute classe d'équivalence dans G/H contient une et une seule fonction de stationnement.

b. En déduire que le nombre de fonction de stationnement de longueur $[n]$ est $(n + 1)^{n-1}$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{R}^n$ tel que les equations des hyperplans $H \in \mathcal{A}$ sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Pour un nombre premier p, on note $\mathcal{A}_p$ l'arrangement d'hyperplans induit par $\mathcal{A}$ dans l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_p)^n$. Montrer que si p est un nombre premier suffisamment grand, alors

$$\chi_{\mathcal{A}}(p) = \left| \mathbb{F}_p^n \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}_p} H \right|$$

où $\chi_{\mathcal{A}}$ est le polynôme caractéristique de $\mathcal{A}$.