Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Un *treillis* L est un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque couple d'éléments s et t admet une borne supérieure, notée $s \vee t$, et une borne inférieure, notée $s \wedge t$.

a. Montrer que les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont associatives, commutatives et idempotents.

b. Montrer que $s \wedge (s \vee t) = s = s \vee (s \wedge t)$ pour tous $s, t \in L$.

c. Montrer que $s \wedge t = s$ ssi $s \vee t = t$ ssi $s \leq t$.

d. Montrer que si L est de cardinalité finie, alors L possède un élément maximum, noté $\widehat{1}$ et un éléments minimum, noté $\widehat{0}$.

e. Soit P un ensemble partiellement ordonné *fini* dans lequel chaque couple d'éléments admet une borne inférieure et qui possède un maximum $\widehat{1}$. Montrer que P est un treillis.

f. Soit P un ensemble partiellement ordonné *fini* dans lequel chaque couple d'éléments admet une borne supérieure et qui possède un minimum $\widehat{0}$. Montrer que P est un treillis.

Exercice 2. Une région R de Shi_n est dite *positive* si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ on a $x_i - x_j > 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$.

a. Montrer que les régions positive de Shi_n sont en bijection avec les fonctions de stationnement non-décroissantes. *(Se servir de l'étiquetage Pak-Stanley.)*

b. Calculer le nombre de régions positives de Shi_n pour tout n. *(Se servir de l'action du groupe symétrique.)*

Exercice 3. Soit *l'arrangement de Catalan* :

$$\mathcal{C}_n = \{x_i - x_j = c : c \in \{-1, 0, 1\} \text{ et } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Montrer que

$$\chi_{\mathcal{C}_n}(x) = x(x-n-1)(x-n-2)(x-n-3)\cdots(x-2n+1)$$

et calculer le nombre de régions de $\mathcal{C}_n$.

Exercice 4. Soit *l'arrangement linial* :

$$\mathcal{L}_n = \{x_i - x_j = 1 : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Montrer que

$$\chi_{\mathcal{L}_n}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}$$

et calculer le nombre de régions de $\mathcal{L}_n$.

Exercice 5. Soit *l'arrangement de tresses de type B* :

$$\mathcal{B}_n^B = \left\{ \begin{array}{c} x_i - x_j = 0, \\ x_i + x_j = 0, \\ x_k = 0 \end{array} \middle| \; 1 \leq i < j \leq n \text{ et } 1 \leq k \leq n \right\}.$$

Montrer que

$$\chi_{\mathcal{B}_n^B}(x) = (x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-2n+1)$$

et calculer le nombre de régions de $\mathcal{B}_n^B$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans dans V et $\mathcal{L}$ son treillis d'intersection. Pour $X \in \mathcal{L}$ on définit $\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} : X \subseteq H\}$.

a. Montrer que $X \leq Y$ dans $\mathcal{L}$ ssi $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}_Y$.

b. Montrer que le treillis d'intersection de l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{A}_X$ est isomorphe à l'intervalle $[V, X]$ du treillis $\mathcal{L}$.

c. En déduire que $\mu_X(U, U') = \mu(U, U')$, où μ_X et μ sont les fonctions de Möbius de $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}$, respectivement.

Exercice 7. Soit $G = (V, E)$ un graphe fini simple à sommets V et arrets E. On dit que $A \subseteq V$ est *connexe* si le sous-graphe de G à sommets A est connexe. Soit L_G le sous-poset du poset de partitions de V qui est constitué des partitions $\alpha = \{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ de V telles que A_1, …, A_l sont connexes.

a. Montrer que

$$\chi_G(t) = \sum_{\alpha \in L_G} \mu(\widehat{0}, \alpha) t^{|\alpha|}.$$

b. En déduire que

$$\chi_G(t) = t^c \chi_{L_G}(t),$$

où c est le nombre de composantes connexes de G.

c. Montrer que le treillis d'intersection de l'arrangement graphique $\mathcal{A}_G$ de G est isomorphe à L_G et en déduire que

$$\chi_G = \chi_{\mathcal{A}_G}.$$

d. Soit $e \in E$. Montrer que

$$\chi_G(t) = \chi_{G-e}(t) - \chi_{G/e}(t).$$

e. Soit $ao(G)$ le nombre de orientations acyclique de G. Montrer que

$$ao(G) = (-1)^{|V|} \chi_G(-1).$$

Exercice 8. Soient $G = (V, E)$ un graphe fini simple à sommets $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ et M_G un monoïde engendré par des éléments $g_1, g_2, \ldots, g_n$ tels que $g_i g_j = g_j g_i$ si $\{i, j\} \in E$. On définit un ordre sur les éléments de M_G :

$$s \leq t \text{ s'il existe un élément } u \in M_G \text{ tel que } su = t.$$

a. Soit $w = g_{i_1} \cdots g_{i_l} \in M_G$. Soit P_w le multi-ensemble $\{g_{i_1}, \ldots, g_{i_l}\}$ muni de l'ordre $g_{i_r} < g_{i_s}$ si : $r < s$ et $g_{i_r} g_{i_s} \neq g_{i_s} g_{i_r}$; ou $r < s$ et $i_r = i_s$. Montrer que I est un idéal de P_w ssi il existe une extension linéaire $g_{j_1}, g_{j_2}, \ldots, g_{j_k}$ de I tel que $w = g_{j_1} g_{j_2} \cdots g_{j_k} z$ avec $z \in M_G$.

b. En déduire que le nombre de factorisations de $w \in M_G$ est le nombre d'extensions linéaires de P_w.

c. En déduire que la fonction de Möbius de M_G est :

$$\mu(s, su) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{si } u \text{ est produit de } r \text{ générateurs} \\ & \text{distincts qui commutent deux-à-deux,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

d. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des indéterminées commutatives. Pour $w = g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_l} \in M_G$, on pose $x^w = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_l}$. Montrer que

$$\left(\sum_{w \in M_G} x^w \right) \left(\sum_{v \in M_G} \mu(\varepsilon, v) x^v \right) = 1.$$

e. Soit $N_G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ le nombre d'éléments distincts de M_G possédant exactement a_i copies de g_i. Montrer que

$$\sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \cdots \sum_{a_n \geq 0} N_G(a_1, a_2, \ldots, a_n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \left(\sum (-1)^r x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \right)^{-1},$$

où la deuxième somme porte sur $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ tel que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ et $g_{i_a} g_{i_b} = g_{i_b} g_{i_a}$ pour tout $a, b \in [r]$.

f. Soit G le graphe vide à n sommets (i.e., G ne possède pas d'arêtes). Montrer que

$$\sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \cdots \sum_{a_n \geq 0} \binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \frac{1}{1 - (x_1 + \cdots + x_n)}.$$

g. Soit G le graphe complet à n sommets. Montrer que

$$\sum_{a_1 \geq 0} \sum_{a_2 \geq 0} \cdots \sum_{a_n \geq 0} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)}.$$

h. Soient G un cycle à $n \geq 4$ sommets. Montrer que

$$\sum_{a_i \in \{0,1\}} N_G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = n! + 1.$$