Feuille d'exercices 4

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}$ son treillis d'intersection, et $\mathcal{F}$ l'ensemble de faces de $\mathcal{A}$. Montrer que l'application supp : $\mathcal{F} \to \mathcal{L}$ est surjective.

Exercice 2. Soit x, y deux faces d'un arrangement $\mathcal{A}$. Une *galerie* de x vers y est une suite de régions adjacentes $(R_0, R_1, \ldots, R_l)$ telles que $x \geq R_0$ et $y \geq R_l$. Montrer que le produit xy de x et y est l'intersection

$$xy = \bigcap \overline{R_0},$$

où l'intersection porte sur les galeries *minimales* $(R_0, R_1, \ldots, R_l)$ de x vers y.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de régions de $\mathcal{A}$. On définit une application

$$\begin{array}{rcl} d : \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \to & \mathbb{N} \\ d(c, c') & = & |\{H \in \mathcal{A} : \sigma_H(c) \neq \sigma_H(c')\}| \end{array}$$

a. Montrer que d est une distance sur l'ensemble $\mathcal{C}$.

b. Soient x un face de $\mathcal{A}$ et $c \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe une unique région $c' \in \mathcal{C}$ telle que $x \geq c'$ et la distance $d(c, c')$ est minimale. Montrer que $c' = xc$.

Rappel : les faces de l'arrangement de tresses $\mathcal{B}_n$ sont en bijection avec les compositions ensemblistes de $[n]$. En particulier, les permutations sont en bijection avec les compositions en singletons via la correspondance suivante :

$$w = w_1 w_2 \cdots w_n \in S_n \longleftrightarrow c_w := \{x \in \mathbb{R}^n : x_{w_1} > x_{w_2} > \cdots > x_{w_n}\}$$

Exercice 4. Soient $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in S_n$ et c_w la région de $\mathcal{B}_n$ correspondant à w. Montrer que pour tout $1 \leq i < j \leq n$ on a

$$\sigma_{H_{i,j}}(c_w) = \begin{cases} -, & \text{si } (i, j) \text{ est une inversion de } w^{-1}, \\ +, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 5. Soit x et y des faces de $\mathcal{B}_n$ et $[X_1, X_2, \ldots, X_l]$ et $[Y_1, Y_2, \ldots, Y_m]$ les compositions correspondantes, respectivement. Montrer que la face xy correspond à la composition

$$[X_1 \cap Y_1, \ldots, X_1 \cap Y_m, X_2 \cap Y_1, \ldots, X_2 \cap Y_m, \cdots, X_l \cap Y_1, \ldots, X_l \cap Y_m]^{✄},$$

où ✄ signifie qu'on supprime les intersections vides.

Exercice 6. Soit $[B_1, B_2, \ldots, B_l]$ une composition (ensembliste) de $[n]$.

a. Montrer que le produit

$$[B_1, B_2, \ldots, B_l] \cdot [\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}]$$

est la composition en singletons formée des éléments de B_1 placé en ordre numérique, suivis par les éléments de B_2 placé en ordre numérique, et ainsi de suite.

b. Soit $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ la permutation dans S_n telle que

$$[B_1, B_2, \ldots, B_l] \cdot [\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}] = [\{w_1\}, \{w_2\}, \ldots, \{w_n\}].$$

Montrer que

$$\operatorname{des}(w) \subseteq \{|B_1|, |B_1| + |B_2|, \ldots, |B_1| + |B_2| + \cdots + |B_{l-1}|\},$$

où $\operatorname{des}(w) = \{i \in [n-1] : w_i > w_{i+1}\}$.

Exercice 7. Soient $\mathcal{B}_n$ l'arrangement de tresses dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ le monoïde de faces de $\mathcal{B}_n$.

a. Montrer que l'action naturelle de S_n sur $\mathbb{R}^n$ induit une action de S_n sur le monoïde $\mathcal{F}$. En particulier, montrer que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{F}$.

b. Montrer que $\mathcal{F}$ est isomorphe, en tant que monoïde muni d'une action de S_n, au monoïde de compositions de $[n]$.

Exercice 8. Soit $\mathrm{Comp}_{[n]}$ le monoïde de compositions de $[n]$.

a. Montrer que

$$M = \big\{[B_1, B_2, \ldots, B_l] \in \mathrm{Comp}_{[n]} : |B_i| \leq 2 \text{ pour tout } i \in [l]\big\}$$

est un sous-semigroupe de $\mathrm{Comp}_{[n]}$ qui est stable pour l'action de S_n.

b. Calculer le nombre d'orbites pour l'action de S_n sur M.

Exercice 9. Soit $\mathrm{Comp}_{[n]}$ le monoïde de compositions de $[n]$.

a. Montrer que

$$M = \big\{[B_1, B_2, \ldots, B_l] \in \mathrm{Comp}_{[n]} : |B_1| = |B_2| = \cdots = |B_{l-1}| = 1\big\}$$

est un sous-monoïde de $\mathrm{Comp}_{[n]}$ qui est stable pour l'action de S_n.

b. Calculer le nombre d'orbites pour l'action de S_n sur M.

c. Soit $\mathbb{Q}M$ l'algèbre de monoïde de M. Montrer que les éléments de $\mathbb{Q}M$ invariants pour l'action de S_n forment une sous-algèbre commutative de $\mathbb{Q}M$.