Feuille d'exercices 5 : Relations de Green

Exercice 1. *(Pré-ordres de Green)*

Soit M un monoïde. On définit les relations suivantes sur les éléments de M. Soient $s, t \in M$.

- $s \leq_{\mathscr{L}} t$ ssi $Ms \subseteq Mt$.
- $s \leq_{\mathscr{R}} t$ ssi $sM \subseteq tM$.
- $s \leq_{\mathscr{J}} t$ ssi $MsM \subseteq MtM$.

a. Montrer que $\leq_{\mathscr{L}}$, $\leq_{\mathscr{R}}$ et $\leq_{\mathscr{J}}$ sont des pré-ordres [1].

b. Soient $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ le monoïde de matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $s, t \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.
- Montrer que $s \leq_{\mathscr{L}} t$ ssi le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes de t contient le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes de s.
- Montrer que $s \leq_{\mathscr{R}} t$ ssi $\ker(t) \subseteq \ker(s)$.
- Montrer que $s \leq_{\mathscr{J}} t$ ssi $\mathrm{rang}(s) \leq \mathrm{rang}(t)$.

c. Soit $\mathcal{F}$ le monoïde de faces d'un arrangement d'hyperplans réels.
- Montrer que $x \leq_{\mathscr{R}} y$ ssi $yx = x$.
- En déduire que $\leq_{\mathscr{R}}$ est un ordre partiel.
- Montrer que $xy \leq_{\mathscr{R}} x$ pour tous $x, y \in \mathcal{F}$.

Exercice 2. *(Relations de Green)*

Soit M un monoïde. On définit les cinq relations suivantes sur les éléments de M. Soient $a, b \in M$.

- $a\mathscr{L}b$ ssi a et b engendrent le même idéal à gauche, c'est-à-dire ssi $Ma = Mb$.
- $a\mathscr{R}b$ ssi a et b engendrent le même idéal à droite, c'est-à-dire ssi $aM = bM$.
- $a\mathscr{J}b$ ssi a et b engendrent le même idéal bilatère, c-à-d ssi $MaM = MbM$.
- La relation $\mathscr{H}$ est l'intersection de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{R}$. Donc, $a\mathscr{H}b$ ssi $a\mathscr{L}b$ et $a\mathscr{R}b$.
- La relation $\mathscr{D}$ est la plus petite relation d'équivalence contenant $\mathscr{L}$ et $\mathscr{R}$.

a. Montrer que ces cinq relations sont des relations d'équivalences.

b. Montrer que, pour tous $a, bc \in M$, si $a\mathscr{L}b$, alors $(ac)\mathscr{L}(bc)$.

c. Montrer que, pour tous $a, bc \in M$, si $a\mathscr{R}b$, alors $(ca)\mathscr{R}(cb)$.

d. Montrer que les relations $\mathscr{L}$ et $\mathscr{R}$ commutent. C'est-à-dire, montrer que, pour tous $x, y, z \in M$, si $x\mathscr{L}z$ et $z\mathscr{R}y$, alors il existe $t \in M$ tel que $x\mathscr{R}t$ et $t\mathscr{L}y$, et vice versa.

e. Soit $\mathcal{F}$ le monoïde de faces d'un arrangement d'hyperplans réels.
- Montrer que $x\mathscr{R}y$ ssi $x = y$.
- Montrer que $\mathscr{J} = \mathscr{L}$ dans $\mathcal{F}$. C'est-à-dire, montrer que $x\mathscr{J}y$ ssi $x\mathscr{L}y$.
- Montrer que $x\mathscr{J}y$ ssi $\mathrm{supp}(x) = \mathrm{supp}(y)$.

1. Un *pré-ordre* est une relation binaire réflexive et transitive.