Feuille d'exercices 6 : Sur les LRBs

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans réels, $\mathcal{F}$ le monoïde de faces de $\mathcal{A}$, et $\mathcal{C}$ l'idéal de $\mathcal{F}$ constitué par les régions (les chambres) de $\mathcal{A}$. Pour une face $x \in \mathcal{F}$, on note $\sigma(x)$ le vecteur de signes de x.

a. Montrer que $\sigma(\mathcal{F})$ est un sous-monoïde $\{0,+,-\}^{|\mathcal{A}|}$.

b. Montrer que si $\mathcal{A}$ est l'arrangement de Boole, alors $\sigma(\mathcal{F}) = \{0,+,-\}^{|\mathcal{A}|}$.

c. Soit $v \in \{0,+,-\}^{|\mathcal{A}|}$. Montrer que $v \in \sigma(\mathcal{F})$ ssi $v \cdot u \in \sigma(\mathcal{C})$ pour tout $u \in \sigma(\mathcal{C})$.

Exercice 2. Soit M un LRB[1]. Montrer que si M possède une partie génératice finie, alors M est fini.

Exercice 3. *(Définition équivalente de LRB)*

a. Soit M un monoïde fini tel que il existe un treillis L (avec opération $\wedge$) et une surjection $\sigma : M \to L$ qui vérifient

$$\sigma(xy) = \sigma(x) \wedge \sigma(y), \tag{1}$$
$$xy = x \text{ ssi } \sigma(x) \leq \sigma(y) \tag{2}$$

pour tous $x, y \in M$. Montrer que M est un LRB.

b. Soit M un LRB fini. On va construire un treillis L et une surjection $\sigma : M \to L$ qui vérifient (1) et (2) pour tous $x, y \in M$.

(*i*) Montrer que la relation définie sur les éléments de M par

$$x \preceq y \text{ ssi } xy = x$$

est réflexive et transitive. Donner un exemple pour montrer que cette relation n'est pas forcément antisymétrique.

(*ii*) Montrer que la relation définie sur les éléments de M par

$$x \sim y \text{ ssi } x \preceq y \text{ et } y \preceq x$$

est une relation d'équivalence.

(*iii*) Montrer que l'ensemble quotient $M/\!\sim$, muni de la relation induite par $\preceq$, est un treillis.

(*iv*) Montrer que l'application canonique $\sigma : M \to M/\!\sim$ est un morphisme de posets surjectif et un morphisme de monoïdes surjectif.

Exercice 4. Soient M et M' deux monoïdes idempotents (c'est-à-dire, $x^2 = x$ pour tout $x \in M$ et pout tout $x \in M'$). Soit $\varphi : M \to M'$ un morphisme de monoïdes surjectif.

a. Montrer que $\varphi(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}'$, où $\mathcal{C}$ est le plus petit idéal de M (par rapport à l'inclusion) et $\mathcal{C}'$ est le plus petit idéal de M'.

b. Montrer que si M est un LRB, alors $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

1. Un monoïde M est *idempotent* si $x^2 = x$ pour tout $x \in M$. Un monoïde idempotent M est un *LRB* si $xyx = xy$ pour tous $x, y \in M$.