Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Le *nombre de Stirling de deuxième espèce* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ comptent le nombre de façons de partager un ensemble de n éléments en k sous-ensemble non-vides.

Exemple : On a $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$ *partitions de* $\{1,2,3,4\}$ *en* 2 *sous-ensembles non-vides :*

$$\Big\{\{1,2,3\},\{4\}\Big\} \qquad \Big\{\{1,2,4\},\{3\}\Big\} \qquad \Big\{\{1,3,4\},\{2\}\Big\} \qquad \Big\{\{2,3,4\},\{1\}\Big\}$$
$$\Big\{\{1,2\},\{3,4\}\Big\} \qquad \Big\{\{1,3\},\{2,4\}\Big\} \qquad \Big\{\{1,4\},\{2,3\}\Big\}$$

On définit $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$ et $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ pour tout $n > 0$, et $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ si $n < 0$.

a. Montrer que ces nombres satisfont la relation de récurrence : pour tout $n > 0$ entier,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

b. Resoudre la récurrence ci-dessus (pour k fixé) afin de montrer la formule explicite :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \frac{r^n}{r!(k-r)!}.$$

(*Indices : trouver la fonction génératrice ; éviter la formule de Taylor ; décomposer en fractions partielles*)

Exercice 2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients complexe. Pour chaque ligne i de A on définit le *i-ième disque de Geršgorin de A* par :

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}| \right\}.$$

(Remarquer que D_i est un disque dans le plan complexe avec centre a_{ii} et de rayon $\sum_{j \ne i} |a_{ij}|$.)

a. Montrer le *Théorème de Geršgorin* : toute valeur propre de A appartient à (au moins) un disque de Geršgorin de A.

b. Soient $d_1, d_2, \cdots, d_n$ des nombres réels positifs. Montrer que les valeurs propres de A appartient à l'ensemble

$$\bigcup_{1 \le i \le n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \le \frac{1}{d_i} \sum_{j \ne i} d_j |a_{ij}| \right\}.$$

(*Piste : appliquer le théorème de Geršgorin à $D^{-1}AD$, où D est une matrice diagonale.*)

c. Utiliser le théorème de Geršgorin pour estimer les valeurs propres et le rayon spectral de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, calculer les valeurs propres et le rayon de A et comparer avec vos estimations.